

# שיטות כמותיות



## תוכן העניינים

|     |                                                                                    |     |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.  | אלגברה ליניארית - מרחבי מכפלה פנימית.                                              | 1   |
| 2.  | אלגברה ליניארית - המרחב $\mathbb{R}^n$ .                                           | 3   |
| 3.  | אלגברה ליניארית - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות.                            | 17  |
| 4.  | אלגברה ליניארית - מטריצות.                                                         | 30  |
| 5.  | אלגברה ליניארית - דטרמיננטות.                                                      | 58  |
| 6.  | אלגברה ליניארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ולכסון מטריצות.                     | 63  |
| 7.  | אלגברה ליניארית - דימיון מטריצות.                                                  | 67  |
| 8.  | אלגברה ליניארית - העתקות ליניאריות.                                                | 72  |
| 9.  | אלגברה ליניארית - מטריצות והעתקות ליניאריות.                                       | 82  |
| 10. | פונקציות מרובות משתנים - נגזרות חלקיות.                                            | 94  |
| 11. | פונקציות מרובות משתנים - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים.                       | 100 |
| 12. | פונקציות מרובות משתנים - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז'). | 102 |
| 13. | פונקציות מרובות משתנים - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה.   | 105 |

# שיטות כמותיות

פרק 1 - אלגברה ליניארית - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

1. מרחבי מכפלה פנימית.....1

## מרחבי מכפלה פנימית

### שאלות

(1) לכל שני וקטורים  $u = (x_1, x_2)$ ,  $v = (y_1, y_2)$  ב- $\mathbb{R}^2$ , נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 4x_2 y_2$$

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$ .

(2) לכל שני וקטורים  $u = (x_1, x_2)$ ,  $v = (y_1, y_2)$  ב- $\mathbb{R}^2$ , נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + kx_2 y_2$$

עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$ ?

(3) לכל שני וקטורים  $u = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $v = (y_1, y_2, y_3)$  ב- $\mathbb{R}^3$ , נגדיר:

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + kx_1 y_3 + x_2 y_2 + kx_3 y_1 + x_3 y_3$$

עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$ ?

(4) לכל שני וקטורים  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $v = (v_1, \dots, v_n)$  ב- $\mathbb{R}^n$ ,

נגדיר:  $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n k_i u_i v_i$ , כאשר  $k_1, \dots, k_n$  מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$ .

מהי המכפלה המתקבלת אם  $k_i = 1$  לכל  $1 \leq i \leq n$ ?

(5) לכל שתי מטריצות  $A, B$  ב- $M_{mn}[R]$ , נגדיר:  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ .

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mn}[R]$ .

$\text{tr}$  מייצג את המילה  $\text{trace}$  (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

(6) לכל שתי פונקציות  $f, g$  ב- $C[a, b]$ , נגדיר:  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot g dx$ .

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$ .

- (7) נתונה מכפלה פנימית על  $R^3$ , שעבורה הקבוצה  $B = \{(1,1,0), (1,1,0), (1,0,0)\}$  מהווה בסיס אורתונורמלי. חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים  $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$ .

### תשובות סופיות

- (1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
- (2)  $k > 9$
- (3)  $-1 < k < 1$
- (4) עבור  $k_i = 1$  לכל  $1 \leq i \leq n$ , נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
- (5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mn}[R]$ .
- (6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a, b]$ .
- (7)  $(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

# שיטות כמותיות

פרק 2 - אלגברה ליניארית - המרחב  $R^n$

תוכן העניינים

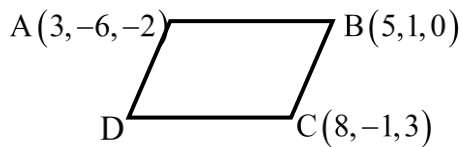
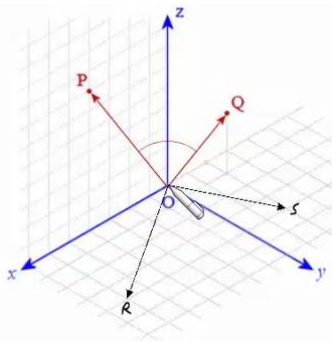
1. וקטורים ..... 3
2. מרחב וקטורי ..... 8
3. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית ..... 9
4. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה ..... 11
5. חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים ..... 14
6. וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס ..... 16

## וקטורים

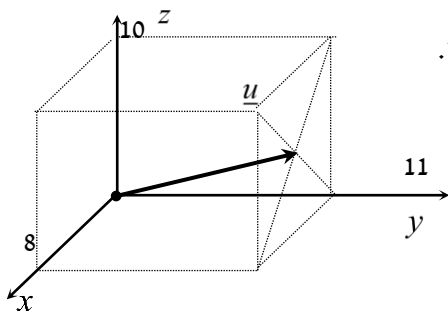
**הערת סימון:** אנו נסמן את הווקטור  $u$  כך:  $\underline{u}$ . סימונים מקובלים נוספים הם:  $\vec{u}, \underline{\underline{u}}$ .  
את גודל הווקטור  $\underline{u}$  נסמן כך  $|\underline{u}|$ . סימון מקובל נוסף הוא  $\|\underline{u}\|$ .  
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

## שאלות

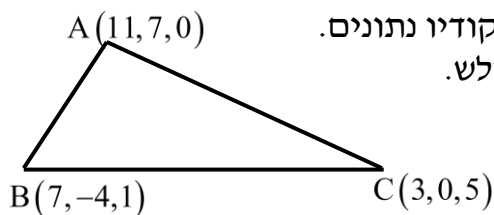
- (1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$  שבאיור. הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים. מצאו מהו הווקטור  $\underline{u}$  על פי השרטוט.



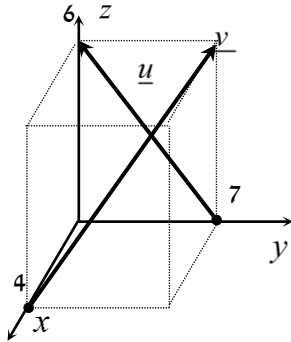
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור  $\overrightarrow{EF}$ , אם נתונות הנקודות  $E(2,0,-3)$  ו-  $F(7,-1,-3)$ .

ב. מצאו את שיעורי הנקודה  $N$ , אם נתונה הנקודה  $M(0,-4,1)$

והווקטור  $\overrightarrow{MN} = (-1,-1,9)$ .



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור  $\underline{u}$  ומהו הווקטור  $\underline{v}$ .

(7) מצאו את  $x$ ,  $y$  ו-  $z$ , אם נתון ש-  $\underline{u} = \underline{v}$ , כאשר  $\underline{u} = (4, -1, 2)$ ,

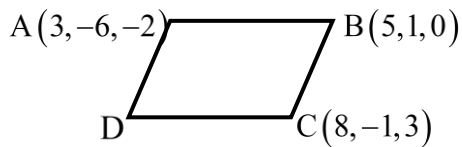
$\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$ .

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$ ,  $B(3,7,-4)$ ,  $C(6,9,0)$ ,  $D(7,4,10)$ ,  $E(9,11,4)$

א. הראו כי:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ .

ב. האם ניתן לומר כי גם  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ? נמקו.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד  $D$ .

\* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים  $\underline{w} = (2, 6, -5)$ ,  $\underline{v} = (4, -2, -6)$ ,  $\underline{u} = (-3, 1, 4)$ .  
 \* בשאלות 13, 14, 16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו:

א.  $2\underline{u}$       ב.  $-0.5\underline{v}$       ג.  $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו:

א.  $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$       ב.  $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12)  $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13)  $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14)  $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15)  $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16)  $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות  $A(1, -3, 0)$ ,  $B(4, 2, -1)$ ,  $C(3, -1, 2)$ ,  
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

(18)  $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

(19)  $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:  
 $A(-4, 2, 1)$ ,  $B(0, 2, -1)$ ,  $C(-3, -5, 0)$ ,  $D(-7, -5, 2)$ .  
 הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

**(21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$$A(1, 2, 0), B(-2, 5, 3), C(-1, 8, 4), D(4, 3, -1)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**(22)** חשבו את הזווית שבין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$ , כאשר :

א.  $\underline{u} = (-2, 2, 5), \underline{v} = (4, 0, 1)$

ב.  $\underline{u} = (6, -3, 1), \underline{v} = (2, 5, 3)$

ג.  $\underline{u} = (-2, 1, 3), \underline{v} = (4, -2, -6)$

## תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$(-17, 7, 24) \quad \text{ג.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ב.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$(9.5, 9.5, -18) \quad \text{ב.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left( \frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

## מרחב וקטורי

### שאלות

בשאלות 1-7 בדקו האם  $W$  תת-מרחב של  $R^3$  :

$$W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\} \quad (1)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c\} \quad (2)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\} \quad (3)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\} \quad (4)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\} \quad (5)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid c - b = b - a\} \quad (6)$$

כלומר,  $a, b$  ו- $c$  מהווים סדרה חשבונית.

$$W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\} \quad (7)$$

כלומר,  $a, b$  ו- $c$  מהווים סדרה הנדסית.

### תשובות סופיות

(1) כן

(2) כן

(3) כן

(4) לא

(5) לא

(6) כן

(7) לא

## צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

- 1) א. האם  $u_1$  הוא צירוף לינארי של  $u_4$ ?  
 ב. האם  $u_1$  שייך ל- $Sp\{u_4\}$ ?  
 ג. האם הקבוצה  $\{u_1, u_4\}$  תלויה ליניארית?
- 2) א. האם  $u_3$  הוא צירוף לינארי של  $u_1$  ו- $u_2$ ?  
 ב. האם  $u_3$  שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$ ?  
 ג. האם הקבוצה  $\{u_1, u_2, u_3\}$  תלויה ליניארית?  
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 3) א. האם  $u_4$  הוא צירוף לינארי של  $u_1$  ו- $u_2$ ?  
 ב. האם  $u_4$  שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$ ?  
 ג. האם הקבוצה  $\{u_1, u_2, u_4\}$  תלויה ליניארית?  
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 4) נתון  $v = (4, 12, k, -2k)$ .  
 א. מה צריך להיות ערכו של  $k$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה צירוף לינארי של  $u_1$  ו- $u_2$ ?  
 ב. מה צריך להיות ערכו של  $k$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$ ?  
 ג. מה צריך להיות ערכו של  $k$ , על מנת שהקבוצה  $\{u_1, u_2, v\}$  תהיה תלויה ליניארית?
- 5) נתון  $v = (a, b, c, d)$ .  
 א. מה התנאים על  $a, b, c, d$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה צירוף לינארי של  $u_1$  ו- $u_2$ ?  
 ב. מה התנאים על  $a, b, c, d$ , על מנת שהווקטור  $v$  יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$ ?  
 ג. מה התנאים על  $a, b, c, d$ , על מנת שהקבוצה  $\{u_1, u_2, v\}$  תהיה תלויה ליניארית?

- (6) הביעו את הווקטור  $(10, 8, 0, 14)$  כצירוף לינארי של  $u_1, u_2$  ו-  $u_3$ .  
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (7) הביעו את הווקטור  $(7, 10, -2, 11)$  כצירוף לינארי של  $u_1, u_2, u_3$  ו-  $u_4$ .  
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (8) עבור איזה ערכים של  $a, b, c$ , הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:  
 $\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$

### תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. כן. ב. כן. ג. כן,  $u_1 = 2u_3 + u_2, u_2 = u_1 - 2u_3$ .
- (3) א. כן. ב. כן. ג. כן,  $u_1 = 4u_4 - u_2, u_2 = 4u_4 - u_1$ .
- (4) א-ג.  $k = -4$ .
- (5)  $a = 5t + 3s, b = 4t - 13s, c = 7s, d = 7t$ .
- (6) אינסוף.
- (7) אינסוף.
- (8) לכל ערך של  $a, b, c$ .

## בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

### שאלות

(1) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $R^3$  :

א.  $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$

ב.  $\{(1, 1, 2), (1, 2, 3), (3, 3, 4), (2, 2, 1)\}$

ג.  $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$

(2) נתונה קבוצת וקטורים ב- $R^3$   $T = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (2, 3, 4)\}$

א. האם  $T$  בסיס ל- $R^3$  ?

ב. מצאו קבוצה  $T'$ , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה ליניארית ב- $T$ .

ג. השלימו את  $T'$  לבסיס של  $R^3$ .

### מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגניות

(3) להלן שלוש מערכות של משוואות הומוגניות :

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \quad 3. \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad 2. \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad 1.$$

נסמן ב- $W$  את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.

נסמן ב- $U$  את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.

נסמן ב- $V$  את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.

מצאו בסיס וממד ל- $U$ ,  $W$  ו- $V$ .

(4) נתון  $U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid a = c, b = d\}$

מצאו בסיס וממד ל- $U$ .

(5) נתון  $U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$

מצאו בסיס וממד ל- $U$ .

(6) נתון  $U = \{v \in R^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$

מצאו בסיס וממד ל- $U$ .

**מציאת בסיס וממד לתת-מרחב**

בשאלות 7 ו-8 נתונים שני תתי מרחבים של המרחב  $R^4$  :

$$U = \text{span}\{(1, 1, -1, 2), (3, -1, 7, 4), (-5, 3, -15, -6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1, -1, 1, 1), (1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, -3), (5, 1, 5, 8)\}$$

(7) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל-  $U$ .

(8) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל-  $V$ .

**מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה**

בשאלות 9 ו-10 מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

$$(9) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

## תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. לא. ב.  $T' = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$  ג.  $T' = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (0, 0, 1)\}$
- (3)  $W$  - בסיס:  $\{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}$  ממד: 2.
- $U$  - בסיס:  $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$  ממד: 2.
- $V$  - בסיס:  $\{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$  ממד: 3.
- (4) בסיס:  $\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$  ממד: 2.
- (5) בסיס:  $\{(-1, 1, 0, 1), (2, -1, 1, 0)\}$  ממד: 2.
- (6) בסיס:  $\{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$  ממד: 3.
- (7) בסיס:  $\{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2)\}$  ממד: 2.
- (8) בסיס:  $\{(1, -1, 1, 1), (0, -1, 1, -2), (0, 0, -2, 5)\}$  ממד: 3.
- (9) מרחב שורה: בסיס:  $\{(4, 1, 1, 5), (0, 11, -5, 3)\}$  ממד: 2.
- מרחב עמודה: בסיס:  $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  ממד: 2, דרגה: 2.
- (10) מרחב שורה: בסיס:  $\{(1, 2, 1, 3, 5), (0, 11, -5, -4), (0, 0, 0, 1, 1)\}$  ממד: 3.
- מרחב עמודה: בסיס:  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 37 \end{pmatrix} \right\}$  ממד: 3, דרגה: 3.

## חיתוך, סכום וסכום ישיר של תת-מרחבים

### שאלות

1) להלן שלוש מערכות של משוואות ליניאריות הומוגניות :

$$1) \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

נסמן ב-  $V, U, W$  את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 1, 2 ו-3 בהתאמה.

א. מצאו בסיס וממד ל-  $U, W$  ו-  $V$ .

ב. מצאו בסיס וממד ל-  $U+V$ .

ג. מצאו בסיס וממד ל-  $U \cap V$ .

בשאלות 2-7 נתונים שני תת-מרחבים של המרחב  $R^4$  :

$$U = \text{sp}\{(1, 1, -1, 2), (3, -1, 7, 4), (-5, 3, -15, -6)\}$$

$$V = \text{sp}\{(1, -1, 1, 1), (1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, -3), (5, 1, 5, 8)\}$$

2) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל-  $U$ .

3) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל-  $V$ .

4) מצאו בסיס וממד ל-  $U+V$ .

5) מצאו בסיס וממד ל-  $U \cap V$  (פתור בשתי דרכים שונות).

6) האם  $U+V = R^4$  ?

7) האם  $U \oplus V = R^4$  ?

## תשובות סופיות

$$B_W = \{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\} \quad , \quad \dim W = 2 \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$B_U = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\} \quad , \quad \dim U = 2$$

$$B_V = \{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \quad , \quad \dim V = 3$$

$$B_{U+V} = \{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \quad \dim(U+V) = 3 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap V} = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 2 \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 0 \\ -3x - y + 2t = 0 \end{cases} \quad , \quad B_U = \{(1, 1, -1, 2), (0, 2, -5, 1)\} \quad , \quad \dim U = 2 \quad (2)$$

$$-8x - y + 5z + 2t = 0 \quad , \quad B_V = \{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 1, -2), (0, 0, 2, -5)\} \quad , \quad \dim V = 3 \quad (3)$$

$$B_{U+V} = \{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \quad , \quad \dim(U+V) = 4 \quad (4)$$

$$B_{U \cap V} = \{(5, 1, 5, 8)\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad (5)$$

$$\text{כ.} \quad (6)$$

$$\text{לא.} \quad (7)$$

## וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

### שאלות

בשאלות 1-5 נתונים שני בסיסים של  $R^3$  :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

(1) מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_1$ . סמנו וקטור זה ב-  $[v]_{B_1}$ .

(2) מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_2$ . סמנו וקטור זה ב-  $[v]_{B_2}$ .

(3) מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B_1$  לבסיס  $B_2$ . סמנו מטריצה זו ב-  $[M]_{B_1}^{B_2}$ .

(4) מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B_2$  לבסיס  $B_1$ . סמנו מטריצה זו ב-  $[M]_{B_2}^{B_1}$ .

(5) אשרו את הטענות הבאות :

$$1. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

$$2. [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$3. [M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$$

### תשובות סופיות

$$(1) (x, y - x - z, z)$$

$$(2) (x, y, z - x - y)$$

$$(3) [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) שאלת הוכחה.

## שיטות כמותיות

פרק 3 - אלגברה ליניארית - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון מערכת משוואות ליניאריות ..... 17
2. חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר) ..... 22
3. פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות ..... 25
4. שימושים של מערכת משוואות ליניאריות ..... 28

## פתרון מערכת משוואות לינאריות

## שאלות

(1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{llll} 2x+y=4 & x-y=0 & x-4y=-7 & x+10y=11 \\ x+y=3 & 2x+y=3 & x-y=-1 & 2x-2y=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

(2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll} x=3 & 2x+y+z=3 & x-4y+z=-7 & x+10y=11 \\ 2x+y=4 & x-z=0 & x-y=-1 & 2x-2y=0 \\ z+t=8 & & x+y+z=5 & x+y=3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ד.} \\ \text{ג.} \\ \text{ב.} \\ \text{א.} \end{array}$$

בשאלות 3-5 בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{(4)} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{(3)} \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{א.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \text{ב.} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} & \text{ג.} \end{array}$$

בשאלות 7-15 הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת**  
 (בשאלות 7, 9, 11 ו-13 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

$$(8) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

$$(12) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(14) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad (13) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(15) \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$$

$$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$$

\* בשאלה 15 יש לדרג את המטריצה פעם מעל השדה  $\mathbb{C}$  ופעם מעל השדה  $\mathbb{R}$ .

בשאלות 16-27 פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 20 \\ 3x + 6y &= 15 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 5x - 4y &= -3 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 32 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 8x - 4y &= 10 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 6y + 16z &= 8 \\ 3x + 2y + 17z &= 1 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -11 \\ 2x + 3y - z &= -5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 4x - 7y &= 0 \\ 8x - 14y &= 2 \\ -16x + 28y &= 4 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ 2x + y &= -1 \\ x - y &= -2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t &= 5 \\ 6x + 8y - 10z + 4t &= 8 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ -9x + 6y &= -3 \\ 6x - 4y &= 2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ 2x + 8y + 12z &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

28) פתרו את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס, מעל השדה  $F$ :

$$\begin{aligned} z_1 + iz_2 + (1-i)z_3 &= 1+4i \\ iz_1 + z_2 + (1+i)z_3 &= 2+i \\ (-1+3i)z_1 + (3-i)z_2 + (2+4i)z_3 &= 5-i \end{aligned}$$

א.  $F = \mathbb{R}$

ב.  $F = \mathbb{C}$

## תשובות סופיות

(1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ ב.} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ג.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ ד.}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (5) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad \text{א. } R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad \text{ב. } R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad \text{ג. } R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$$

$$(7) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(9) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$(10) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(11) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(12) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$F=\mathbb{R} \qquad F=\mathbb{C}$

$$\phi \quad (18) \qquad (x, y) = (5-2t, t) \quad (17) \qquad (x, y) = (1, 2) \quad (16)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (20) \qquad \phi \quad (19)$$

$$(x, y) = (-1, 1) \quad (22) \qquad (x, y, z) = (-1-7t, 2+2t, t) \quad (21)$$

$$(x, y) = \left( \frac{1+2t}{3}, t \right) \quad (24) \qquad \phi \quad (23)$$

$$\phi \quad (26) \qquad (x, y, z, t) = (-a+2b, 1+2a-2b, a, b) \quad (25)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (27)$$

$$(z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t+1+i, 3, t) \cdot \text{ב} \qquad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1) \cdot \text{א} \quad (28)$$

## חקירת מערכת משוואות ליניאריות (עם פרמטר)

### שאלות

בשאלות 1-6 מצאו לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$x + ky + z = 1$$

$$x + y + kz = 1 \quad (2)$$

$$kx + y + z = 1$$

$$x - y + z = 1$$

$$5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \quad (1)$$

$$3x - y + (k + 3)z = 3$$

$$2x - y + z = 0$$

$$x + 2y - z = 0 \quad (4)$$

$$5x + (1 - k)y + k^2 z = 1$$

$$x + 2ky + z = 0$$

$$3x + y + kz = 2 \quad (3)$$

$$x + 9ky + 5z = -2$$

$$x + ky + 3z = 2$$

$$kx - y + z = 4 \quad (6)$$

$$3x + y + (2 + k)z = 0$$

$$kx - y = 1$$

$$(k - 2)x + ky = -2 \quad (5)$$

$$(k^2 - 1)z = 9$$

בשאלות 7-9 מצאו לאילו ערכי  $k$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$2x - 3y + z = 1$$

$$4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k \quad (8)$$

$$2x + ky = 3$$

$$(k + 3)x + 2y = k^2 + 5 \quad (7)$$

$$6x + 3ky = 7k^2 + 2$$

$$3x + 4y - z = 2$$

$$kx - 2y + z = -1$$

$$x + 8y - 3z = k \quad (9)$$

$$2x + 6y - 2z = 0.5k + 1$$

בשאלות 10-12 מצאו לאילו ערכים של  $a$  ושל  $b$  (אם יש כאלה) יש למערכות:  
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

$$x + y - z + t = 1$$

$$ax + y + z + t = b \quad (12)$$

$$3x + 2y + at = 1 + a$$

$$2x + 4y + az = -1$$

$$x + 2y + 4z = -4$$

$$x + 2y - 4z = 0$$

$$x + 2y + 6z = -2b$$

(11)

$$x + 2y - 4z = b$$

$$7x - 10y + 16z = 7 \quad (10)$$

$$2x - ay + 3z = 1$$

$$x + az = 1$$

$$y + 2z = 2 \quad (13) \text{ נתונה מערכת המשוואות:}$$

$$bx + cy + dz = 3$$

- א. מצאו תנאי עבור  $a, b, c, d$ , כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.  
 ב. מצאו תנאי עבור  $b, c, d$ , כך שלכל  $a$ , למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

$$(14) \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases}$$

- א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.  
 ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.  
 ג. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת:  
 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.  
 ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.  
 ה. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון שבו  $z = 0$ .  
 ו. מצאו לאילו ערכי  $k$  יש למערכת פתרון יחיד שבו  $z = 0$ .  
 ז. מצאו עבור איזה ערך של  $k$  פתרון של המשוואה השלישית הוא  $(1, 2, 3)$ .  
 האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.  
 ח. מצאו לאיזה ערך של  $k$ ,  $(1, 0, 0)$  הוא הפתרון היחיד של המערכת.

$$(15) \text{ נתונות המשוואות של 3 מישורים: } \begin{cases} 3x + my = 3 \\ mx + 2y - mz = 1 \\ -x + mz = -1 \end{cases}$$

- בסעיפים א-ג מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע  $m$  שלושת המישורים:  
 א. נפגשים בנקודה אחת (מצא נקודה זו).  
 ב. לא נפגשים באף נקודה.  
 ג. בעלי אינסוף נקודות משותפות (מצא נקודות אילו).  
 ד. האם קיים ערך של  $m$  עבורו 3 המישורים מתלכדים או מקבילים?

## תשובות סופיות

- (1) 1.  $k \neq 1, k \neq -2$  2.  $k = 1$  3.  $k = -2$
- (2) 1.  $k \neq 1, k \neq -2$  2.  $k = -2$  3.  $k = 1$
- (3) 1.  $k \neq -1, k \neq \frac{4}{7}$  2.  $k = \frac{4}{7}$  3.  $k = -1$
- (4) 1.  $k \neq 1, k \neq -0.4$  2.  $k = -0.4$  3.  $k = 1$
- (5) 1.  $k \neq \pm 1, k \neq -2$  2.  $k = \pm 1, k = -2$
- (6) 1.  $k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$  3.  $k = -1, k = -3, k = 2$
- (7) 1.  $k = -1$  2.  $k \neq \pm 1$  3.  $k = 1$
- (8) 1.  $k \neq 1$  2.  $k = 1$  3.  $k \neq 3$
- (9) 1.  $k \neq 1$  2.  $k = 1$  3.  $k \neq 3$
- (10) 1.  $a \neq 2$  2.  $a = 2, b \neq -3$  3.  $a = 2, b = -3$
- (11) 1.  $a \neq -6$  או  $b \neq 2.5$  2.  $a = -6, b = 2.5$  3.  $a = -6, b = 2.5$
- (12) 1.  $a = 2, b \neq 2$  2.  $a = 2, b = 2$  3.  $a \neq 2$
- (13) א.  $ab + 2c \neq d$  ב.  $b = 0, c = 1.5, d = 3$
- (14) א.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$  ב.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix}$
- ג. 1.  $k \neq 2, k \neq -1$  2.  $k = -1$  3.  $k = 2$  4.  $(x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$
- ה.  $k = \pm 2$  ו.  $k = -2$  ז.  $k = 2$ , לא.  $k = -2$  ח.  $k = -2$
- (15) א.  $m \neq 0, -2, 3$  ב.  $m = -2, 3$  ג.  $m = 0$  ד. לא.

## פתרון וחקירת מערכת הומוגנית של משוואות לינאריות

### שאלות

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ 4x - 2y + 5z = 12 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(2) \quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 2z = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases} \quad \text{פתרו את המערכת}$$

על סמך הפתרון, קבעו את הפתרון של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$(3) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ -x + 2y - z = k \\ 2x + my + z = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת:}$$

- א. מצאו את ערכי  $m$ , עבורם למערכת ההומוגנית המתאימה אינסוף פתרונות.
- ב. עבור ערך  $m$  שנמצא ב-א, מצאו את ערכי  $k$ , עבורם למערכת פתרון.
- ג. עבור ערכי  $m, k$  שנמצאו בסעיפים הקודמים, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הנתונה, וקבעו את הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

(4) נתון שהחמישייה  $(4t - 2s + 4, -t + s, 2, t, s)$  מהווה פתרון כללי של מערכת ליניארית נתונה. קבעו אילו מבין הטענות הבאות נכונות:

- א. המערכת הנתונה היא מערכת הומוגנית.
- ב. החמישייה  $(4, 0, 2, 0, 0)$ , היא פתרון פרטי של המערכת הנתונה.
- ג. החמישייה  $(4, 0, 2, 1, 1)$ , היא פתרון של המערכת הנתונה.
- ד. לכל  $a$  ממשי, החמישייה  $(4a, 0, 2a, 0, 0)$  אינה פתרון של המערכת הנתונה.
- ה. החמישייה  $(4t - 2s, -t + s, 0, t, s)$ , היא פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
- ו. החמישייה  $(0, 1, 0, 1, 2)$ , היא פתרון פרטי של המערכת ההומוגנית המתאימה.
- ז. במערכת הנתונה, מספר המשוואות לאחר דירוג הוא 2.

$$(5) \quad \begin{cases} 3x + my = 0 \\ mx + 2y - mz = 0 \\ -x + mz = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה המערכת ההומוגנית}$$

יהי  $W$  אוסף הפתרונות של המערכת.  
 עבור אילו ערכים של  $m$  הקבוע (אם בכלל)  $W$  הוא:  
 א. נקודה (מצאו נקודה זו).  
 ב. ישר (מצאו ישר זה).  
 ג. מישור (מצאו מישור זה).

$$(6) \quad \text{נתונה המטריצה} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & a & b & c \\ 4 & d & e & f \\ -3 & g & h & i \end{pmatrix}$$

נסמן ב- $A'$  את הצורה המדורגת של  $A$ .  
 ידוע כי בממ"ל ההומוגנית המתאימה יש יותר משתנים חופשיים ממשתנים תלויים.  
 מצאו את  $A$ .

## תשובות סופיות

- (1) פתרון כללי של המערכת  $(4 - \frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t + 2, t)$ .
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(-\frac{3}{2}t, -\frac{1}{2}t, t)$ .
- (2) למערכת פתרון יחיד  $(x, y, z) = (1, 1, 2)$ .
- למערכת ההומוגנית המתאימה פתרון יחיד  $(0, 0, 0)$ .
- (3) א.  $m = -3$     ב.  $k = -2$     ג. פתרון כללי של המערכת  $(x, y, z) = (t, t - 1, t)$ .
- פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה הוא  $(t, t, t)$ .
- (4) א. הטענה לא נכונה.    ב. הטענה נכונה.    ג. הטענה לא נכונה.
- ד. הטענה לא נכונה.    ה. הטענה נכונה.    ו. הטענה לא נכונה.
- ז. הטענה לא נכונה.
- (5) א.  $m \neq 0, -2, 3$ . הנקודה היא  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ .
- ב. אם  $m = 0$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(0, 0, 1)$ . אם  $m = 2$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(2, -1, 1)$ .
- אם  $m = 3$  נקבל ישר  $\underline{x} = t(3, -3, 1)$ .
- ג. אין ערכים של  $m$  עבורם נקבל מישור.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix} \quad (6)$$

## שימושים של מערכת משוואות לינאריות

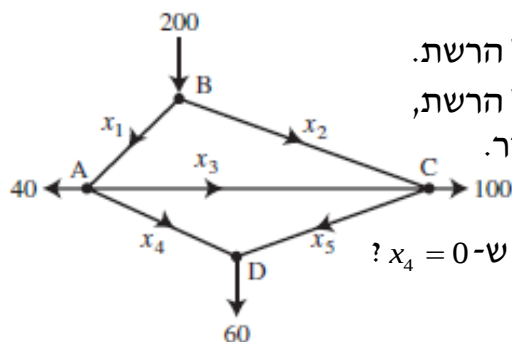
## שאלות

1) באיור שלהלן רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.

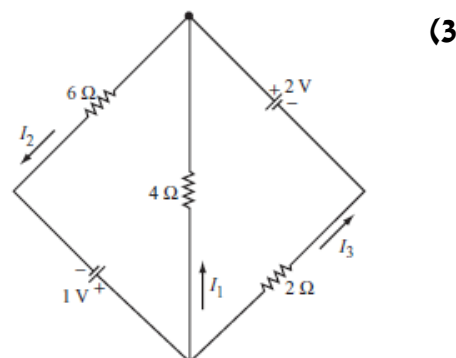
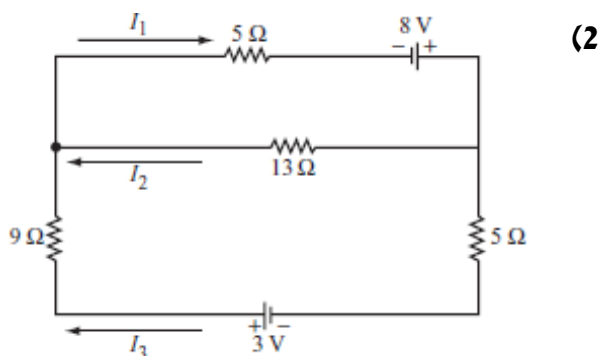
א. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצאו את תבנית הזרימה הכללית של הרשת, אם ידוע שהכביש שהזרם שלו  $x_4$  סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של  $x_1$ , אם ידוע ש- $x_4 = 0$ ?



בשאלות 2-3 מצאו את הזרמים במעגלים החשמליים (חוקי קירכהוף וחוק אוהם):



\* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.

## תשובות סופיות

(1) א.  $x_3$  ו-  $x_5$  חופשיים.  $x_1 = 100 + x_3 - x_5$ ,  $x_2 = 100 - x_3 + x_5$ ,  $x_4 = 60 - x_5$ .

ב.  $x_3$  חופשי.  $x_1 = 40 + x_3$ ,  $x_2 = 160 - x_3$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = 60$ . ג. 40.

$$(2) \text{ א. } I_1 = \frac{255}{317}, I_2 = \frac{97}{317}, I_3 = \frac{158}{317}$$

$$(3) \text{ } I_1 = -\frac{5}{22}, I_2 = \frac{7}{22}, I_3 = \frac{6}{11}$$

# שיטות כמותיות

## פרק 4 - אלגברה ליניארית - מטריצות

### תוכן העניינים

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| 1. מטריצות                                 | 30 |
| 2. המטריצה ההופכית                         | 35 |
| 3. מטריצה אלמנטרית                         | 42 |
| 4. פירוק LU                                | 44 |
| 5. בחזרה למערכת משוואות ליניארית           | 45 |
| 6. מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות | 52 |
| 7. דרגה של מטריצה                          | 53 |
| 8. שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה ליניארית | 57 |

## מטריצות

## שאלות

- (1) נתונות המטריצות הבאות:  $A_{4 \times 6}$ ,  $B_{4 \times 6}$ ,  $C_{6 \times 2}$ ,  $D_{4 \times 2}$ ,  $E_{6 \times 4}$ .  
קבעו אילו מבין המטריצות הבאות מוגדרות.  
במידה והמטריצה מוגדרת, רשמו את סדר המטריצה:

- א.  $A+B$     ב.  $AB$     ג.  $AC-D$     ד.  $AE-B$   
ה.  $B+AB$     ו.  $E(B+A)$     ז.  $(E+A^T)D$     ח.  $E^T B$   
ט.  $E(AC)$     י.  $E(B-A)$

- (2) מצאו את  $x, y, z$ , אם ידוע כי:
- $$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

בשאלות 3-8 נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשבו (במידה וניתן):

(3) א.  $E+D$     ב.  $E-D+I_3$

ג.  $5C$     ד.  $2D+4EI_3$

(4)  $2tr(D^2 - 2E)$

(5) א.  $4C^T + A$     ב.  $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$

(6)  $I_2 BC$

(7)  $tr(C^T C)$

(8)  $DABC$

(9) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

$$\text{נתון כי } (A-I)(A+I) = 0.$$

הוכיחו או הפריכו:  $A=I$  או  $A=-I$ .

(10) אפיינו את כל המטריצות  $A_{2 \times 2}$  שמקימות  $A^2 = -4I$ .

$$(11) \text{ הוכיחו כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 1-2^n & 1 \end{pmatrix}$$

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שנדרש לדעת הוכחות באינדוקציה.

(12) שתי מטריצות  $A$  ו- $B$  יקראו מתחלפות אם  $AB=BA$ .

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית:

א. אם המטריצות  $A$  ו- $B$  מתחלפות עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז המטריצות

$A$  ו- $B$  מתחלפות.

ב. אם המטריצה  $A$  מתחלפת עם המטריצה  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , אז  $A^T = -A$ .

(13) תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ .

$$\text{נתון כי } AA^T = 0. \text{ הוכיחו כי } A=0.$$

האם הטענה נשארת נכונה אם איברי  $A$  מרוכבים?

אם כן, הוכיחו. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

(14) יהיו  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות המקיימות  $AB=BA$  (מטריצות מתחלפות).

א. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $AB^k = B^k A$ .

ב. הוכיחו כי לכל  $k$  טבעי מתקיים  $(AB)^k = A^k B^k$ .

$$(15) \text{ לפי נוסחת הבינום של ניוטון } (A+B)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k, \text{ כאשר}$$

$$A, B \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}$$

א. האם נוסחת הבינום נשארת נכונה גם אם  $A$  ו- $B$  מטריצות ריבועיות

מסדר  $\ell$ ?

ב. מצאו תנאי מספיק על המטריצות  $A$  ו- $B$ , על מנת שנוסחת הבינום

תהיה נכונה עבורן.

ג. מצאו את הפיתוח של  $(A+I)^n$  ו- $(A-I)^n$ , כאשר  $A$  ו- $I$  ריבועיות מסדר

$\ell$ .

- 16** א. הגדירו והדגו את המונח מטריצה נילפוטנטית.  
 ב. נניח ש- $A$  ו- $B$  מטריצות מתחלפות ונילפוטנטיות.  
 הוכיחו שגם המטריצות  $AB$  ו- $A+B$  נילפוטנטיות.

- 17** תהי  $A_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $a_{ij} = \min\{i, j\}$ .  
 תהי  $B_{n \times n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $b_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j = n+1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ .

- א. כתבו את המטריצות  $A$  ו- $B$  בצורה מפורשת.  
 ב. המטריצה  $C$  מקיימת  $C = A \cdot B$ .  
 חשבו את  $C$  ומצאו נוסחה עבור  $c_{ij}$  לכל  $1 \leq i, j \leq n$ .

- 18** מצאו מטריצה ממשית  $A$ , כך שיתקיים  $A - \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A \right)^T = A - A^T$ .

## תשובות סופיות

(1) א.  $4 \times 6$  ב. לא. ג.  $4 \times 2$  ד. לא. ה. לא. ו.  $6 \times 6$

ז.  $6 \times 2$  ח. לא. ט.  $6 \times 4$  י.  $6 \times 6$

(2)  $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

(3) א.  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$  ב.  $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$  ג.  $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$

ד.  $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

(4) 230

(5) א.  $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$  ב.  $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$

(6)  $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

(7) 63

(8)  $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{a^2+4}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) א+ב. שאלת הוכחה.

ג.  $(A+I)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}A^1 + \binom{n}{n}I$

$(A-I)^n = \binom{n}{0}A^n - \binom{n}{1}A^{n-1} + \binom{n}{2}A^{n-2} - \dots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n-1}A^1 + (-1)^n\binom{n}{n}I$

(16) שאלת הוכחה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & \cdots & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & \cdots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } c_{ij} = \min \{i, n+1-j\}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

## המטריצה ההופכית

### שאלות

בשאלות 1-9 מצאו את ההפוכה של כל מטריצה.  
בדקו את התשובות על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \text{(1)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(2)} & \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{(3)} & \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{(4)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{(5)} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{(6)} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{(7)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{(8)} & \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{(9)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

10) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$  הפיכה?

11) עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$  המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  איננה הפיכה?

הניחו שהמטריצות בשאלות 12-14 הן הפיכות מסדר  $n$ , וחלצו את  $X$ :

12) א.  $AXC = D$  ב.  $A^{-1}XC = A^{-1}DC$  ג.  $P^{-1}X^T P = A$

13) א.  $C^{-1}(A+X)D^{-2} = I$  ב.  $(A-AX)^{-1} = X^{-1}C$

14)  $ABC^T X^{-1} BA^T C = AB^T$

15) נתון  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ .

חשבו את  $X$ , אם ידוע כי  $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$ .

16) נתון  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . חשבו את  $Y$ , אם ידוע כי  $BYB^T = B^{-1} + B$ .

17) נתון  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ .

חשבו את  $B$ , אם נתון בנוסף כי:  $5A^T B(I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$ .

18) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^2 - 5A - 2I = 0$ .

הוכיחו כי  $A$  הפיכה ובטאו את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

ב. נתון:  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $(A - 3I)(A + 2I) = 0$ .

הוכיחו כי  $A$  הפיכה ובטאו את  $A^{-1}$  במונחי  $A$  ו- $I$ .

19) נתון כי  $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ .

א. חשבו את  $p(A)$ .

ב. בעזרת תוצאת סעיף א (ולא בדרך אחרת), הוכיחו ש- $A$  הפיכה, ובטאו את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד.

20) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית המקיימת  $A^4 = 0$ .

א. הוכיחו כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי המטריצה  $I - A$  הפיכה, ומצאו את ההופכית שלה.

21) נתון כי  $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$ .

הוכיחו כי קיימת מטריצה הפיכה  $D$ , כך ש- $D^{-1}AD = C$ .

\* הניחו שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

\*\* לסטודנטים המכירים את המושג **דמיון מטריצות**, ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכיחו: אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$ , אז  $A$  דומה ל- $C$ .

(כלומר יחס הדמיון הוא יחס טרנזיטיבי)

**הערה:** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצאו שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

**(22)** תהיינה  $A, B$  מטריצות ריבועיות ממטיות מסדר  $n \geq 2$ . הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

- א.  $AB = BA$ .
- ב. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.
- ג. אם  $A^2 - AB = I_n$ , אז בהכרח  $A$  הפיכה.
- ד. אם  $(AB)^{100} = I$ , אז בהכרח  $(BA)^{100} = I$ .
- ה. אם  $(AB)^{100} = 0$ , אז בהכרח  $(BA)^{101} = 0$ .

**(23)** תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , עבורן  $A^2 + AB = I$ .

- א. הוכיחו ש- $AB = BA$ .
- ב. אם נתון בנוסף ש- $B^2 + BA$  היא מטריצת האפס, הוכיחו שגם  $B$  היא מטריצת האפס.

**(24)** תהיינה  $A, B$  מטריצות כלשהן.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- א. אם  $AB = I$  אז  $B = A^{-1}$ .
- ב. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה ריבועית, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.
- ג. אם המכפלה  $AB$  היא מטריצה הפיכה, אזי  $A, B$  מטריצות ריבועיות.
- ד. המכפלה  $AB$  לא הפיכה.
- ה. אם  $A$  מטריצה ריבועית והמכפלה  $AB$  מוגדרת, אזי  $B$  מטריצה ריבועית.

**(25)** מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא אידמפוטנטית אם  $A^2 = A$ . הוכיחו:

- א. למעט המקרה בו  $A = I$ , מטריצה אידמפוטנטית היא לא הפיכה.
- ב. אם נחסר מטריצה אידמפוטנטית ממטריצת היחידה נקבל מטריצה אידמפוטנטית.
- ג. אם  $A$  מטריצה אידמפוטנטית ריבועית מסדר 2, אז  $\text{tr}(A) = 1$  או ש- $A$  מטריצה אלכסונית.
- ד.  $A$  אידמפוטנטית  $\Leftrightarrow A^n = A$ , לכל  $n$  טבעי.

$$(26) \text{ נתונה } M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

מצאו תנאי על הקבועים  $a, b, c, d$  כך ש- $M$  תהיה הפיכה ומצאו את  $M^{-1}$  במקרה זה.

(27) נתון כי  $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$  הפיכה.

לגבי כל אחת מהמערכות הבאות קבע את מספר הפתרונות של המערכת.

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y = \alpha_{13}$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y = \alpha_{23} \quad \text{א.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y = \alpha_{33}$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + w = 0$$

$$\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z - 4w = 1 \quad \text{ב.}$$

$$\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + 3w = -4$$

$$\alpha_{11}x + \alpha_{21}y + \alpha_{31}z = 3$$

$$\alpha_{12}x + \alpha_{22}y + \alpha_{32}z = 1 \quad \text{ג.}$$

$$\alpha_{13}x + \alpha_{23}y + \alpha_{33}z = 1$$

(28) תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ .

הוכיחו:

א. אם  $BA = I - A^2$  וגם  $B^2 = -AB$ , אז  $B = 0$ .

ב. אם  $A^2 = 2I$ , אז  $A + I$  ו-  $A - I$  הפיכות.

(29) תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , כך ש-  $B^2A = -2B^3$  (1) וגם

$$B^3 + AB^2 = 3I \quad (2).$$

הוכיחו ש-  $A$  ו-  $B$  הפיכות, ובטאו את  $A^{-1}$  ו-  $B^{-1}$  באמצעות  $B$ .

(30) תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ , כך ש-  $BA + 2I = B$ .

א. הוכיחו ש-  $B$  הפיכה.

ב. ידוע ש-  $B$  סימטרית.

הוכיחו כי  $A$  סימטרית.

(31) תהי  $A$  מטריצה נילפוטנטית (כלומר, קיים  $n$  טבעי כך ש-  $A^n = 0$ ).

א. הוכיחו כי  $A$  לא הפיכה.

ב. הוכיחו כי  $I - A$  ו-  $I + A$  הפיכות.

ג. נגדיר:  $e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$

הוכיחו: אם  $e^A = I$  אז  $A = 0$ .

**(32)** נתונות שתי מטריצות,  $A$  ו- $B$ , מסדר  $n$ .

סמנו את הטענה שנכונה בהכרח:

- א. ל- $A$  ול- $A^T$  יש אותה צורה מדורגת קנונית.
- ב. אם  $A, B$  מדורגות קנונית, אז  $A+B$  מדורגת קנונית.
- ג. אם  $A, B$  מדורגות קנונית, אז  $A-B$  מדורגת קנונית.
- ד. אם בצורה המדורגת קנונית של  $B$  יש שורת אפסים, אז גם בצורה המדורגת קנונית של  $AB$  יש שורת אפסים.

## תשובות סופיות

$$\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5) \quad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (7) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (9) \quad \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$k=1, k=-4 \quad (11) \quad k \neq 1, k \neq -2 \quad (10)$$

$$(P^{-1})^T A^T P^T \quad \lambda \quad D \quad \text{ב.} \quad A^{-1}DC^{-1} \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$(A+C^{-1})^{-1} A \quad \text{ב.} \quad CD^2 - A \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15) \quad BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (14)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (17) \quad Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad \text{ב.} \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad \text{א.} \quad (18)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad \text{ב.} \quad f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{א.} \quad (19)$$

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

(21) שאלת הוכחה.

(22) שאלת הוכחה.

(23) שאלת הוכחה.

(24) שאלת הוכחה.

(25) שאלת הוכחה.

$$((a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)) \quad M^{-1} = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2+d^2)} M^T \quad (26)$$

- 27) א. אין פתרון. ב. אינסוף פתרונות. ג. פתרון יחיד.  
28) שאלת הוכחה.  
29) שאלת הוכחה.  
30) שאלת הוכחה.  
31) שאלת הוכחה.  
32) ד

## מטריצה אלמנטרית

### שאלות

(1) רשמו את המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(2) רשמו את המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$  כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

(3) הוכיחו או הפריכו כל אחד מסעיפים א-ד.  
נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית, ו- $B$  מתקבלת מ- $A$  ע"י סדרת פעולות דירוג.  
ע"י הפעלת אותה סדרה של פעולות תתקבל גם:

א.  $A^2$  מ- $B^2$ .

ב.  $BA$  מ- $A^2$ .

ג.  $BA$  מ- $B^2$ .

ד.  $AB$  מ- $B^2$ .

(4) תהי  $A \in M_3[R]$ , כך שסכום איברי השורה הראשונה שלה הוא 4, סכום איברי השורה השנייה שלה הוא 1 וסכום איברי השורה השלישית שלה הוא 10.

נגדיר את המטריצות האלמנטריות  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

למה שווה סכום איברי השורה השלישית במטריצה  $E_2 E_1 A$ ?

**פתרו בשתי דרכים:**

**דרך א'** – בעזרת תכונות המטריצה האלמנטרית.

**דרך ב'** – בעזרת כפל מטריצות.

## תשובות סופיות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{e_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \quad (1)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{e_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \cdot \quad (2)$$

$$\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_5} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_6} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_7} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{e_8} = A$$

(3) שאלת הוכחה.

(4) -3

## פירוק LU

## שאלות

(1) רשמו את פירוק LU של המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

(2) רשמו את פירוק LU של המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}$

(3) רשמו את פירוק LU של המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

## תשובות סופיות

(1)  $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_U$

(2)  $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 13 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_U$

(3)  $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_U$

## בחזרה למערכת משוואות ליניארית

### שאלות

(1) בסעיפים הבאים מצאו מטריצות  $A$ ,  $\underline{x}$  ו- $\underline{b}$ , המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה  $A\underline{x} = \underline{b}$ :

$$2x - 3y + z + t = 1$$

$$4x + y + 2z = 4$$

$$y + z + t = 1$$

$$x - 4z - 2y = 10$$

$$2x + y - z = 3$$

$$x + 2y - 4z = 5$$

$$6x + 4y + z = 2$$

ב.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בשאלות 2-6 נתון כי

$$A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (4)$$

$$A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (3)$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \quad (2)$$

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (6)$$

$$A\underline{x} = \underline{x} \quad (5)$$

$$2x - y + z = 3$$

$$(7) \text{ פתרו את מערכת המשוואות } 3x - 2y + 2z = 5,$$

$$5x - 3y + 4z = 11$$

בעזרת המטריצה ההפוכה.

$$x + 4y + 2z + 4t = 1$$

$$x + 2y - z = 0$$

$$y + z + t = 1$$

$$x + 3y - z - 2t = 0$$

(8) פתרו את מערכת המשוואות

בעזרת המטריצה ההפוכה.

(9) למערכת משוואות מסוימת יש את שני הפתרונות הבאים:

$$(x, y, z) = (2, -8, 4) \quad , \quad (x, y, z) = (-1, 4, -2)$$

הוכיחו שהמערכת חייבת להיות הומוגנית.

**10** למערכת משוואות לא הומוגנית יש את שני הפתרונות הבאים :  
 $(x, y, z) = (2, 3, 4)$  ,  $(x, y, z) = (-1, 4, -2)$   
 מצאו פתרון לא טריוויאלי כלשהו של המערכת ההומוגנית המתאימה.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases} \quad \text{11 נתונה המערכת}$$

מצאו עבור אילו ערכים של הקבוע  $k$ , למערכת :  
 א. פתרון יחיד. ב. אין פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

\* השתמשו בפתרון במושג 'דרגה של מטריצה'.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} \quad \text{12 נתון}$$

ידוע כי  $\text{rank}(A) = 3$ , וידוע כי למערכת  $Ax = b$  יש פתרון.  
 מצאו את הקבועים  $k, m$ .

**13** נתונה מטריצה ריבועית  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה 0.  
 הוכיחו ש- $A$  מטריצה לא הפיכה.

**14** נתונה מטריצה ריבועית הפיכה  $A$ , המקיימת את התכונה הבאה :  
 סכום האיברים בכל שורה של המטריצה  $A$  שווה  $k$ .  
 הוכיחו שסכום האיברים בכל שורה של המטריצה הוא קבוע.  
 בטאו קבוע זה בעזרת  $k$ .

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{15 מטריצה } A \text{ מקיימת}$$

הוכיחו כי הווקטור  $\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$  הוא פתרון של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

- 16** יהיו  $A, B$  מטריצות ממשיות מסדר  $n \times n$ . עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.
- א. אם למערכת  $(AB)x = 0$  קיימים שני פתרונות שונים, אז בהכרח  $A$  לא הפיכה.
- ב. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת  $(AB)x = 0$ , אז למערכת  $(BA)x = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.
- ג. אם למערכת  $Ax = 0$  קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2 = 0$ .
- ד. אם למערכת  $(A^t A)x = 0$  קיים פתרון יחיד, אז  $A$  לא הפיכה.
- ה. אם קיים פתרון שונה מ-0 למערכת ההומוגנית  $(AB)x = 0$ , אז למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  קיים פתרון שונה מ-0.

- 17** נתונה מערכת משוואות מעל  $\mathbb{R}$ :  $Ax = d$  ( $d \neq 0$ ). נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר 4, המקיימת  $\text{rank}(A) = 2$ . ידוע כי הווקטורים הבאים פותרים את המערכת הנתונה:
- $$u = (x_1, x_2, 6, 7), \quad v = (y_1, y_2, 1, 2), \quad w = (z_1, z_2, 4, 3)$$
- מי מבין הבאים הוא הפתרון הכללי של המערכת הנתונה:
- א.  $x = au + bv + cw$
- ב.  $x = (a + b + 1)u - av - bw$
- ג.  $x = au + bv + w$
- ד.  $x = (a - b)u + (b - c)v + (c - a)w$
- ה.  $x = (a + b)u - (av + bw + u)$ , כאשר  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**הערה:** בחלקו האחרון של פתרון תרגיל זה נדרש הידע הבא מהפרק מרחבים וקטורים: בהינתן מערכת הומוגנית  $Ax = 0$ :

- אוסף כל הפתרונות של המערכת נקרא מרחב הפתרונות של המערכת.
- מספר המשתנים החופשיים במערכת לאחר דירוג נקרא המימד של מרחב הפתרונות. בכל אופן, מומלץ לחזור לתרגיל זה אחרי שתעברו על הפרק מרחבים וקטורים.

- 18** נתונה מערכת  $A_{m \times n} \cdot x = b$ . הוכיחו או הפריכו:
- א. אם  $u$  וגם  $\lambda u$  ( $\lambda \neq 1$ ) פתרונות של המערכת אז המערכת הומוגנית.
- ב. אם  $u$  ו- $v$  וגם  $\alpha u + \beta v$  ( $\alpha, \beta \neq 0$ ) פתרונות של המערכת אז היא הומוגנית.
- ג. אם הווקטורים  $(1, 2, \dots, n), (n, \dots, 2, 1)$  פותרים את המערכת והווקטור  $(n+1, \dots, n+1)$  לא פותר את המערכת, אז המערכת לא הומוגנית.

**(19)** תהי  $A$  מטריצה כך שלמערכת  $Ax = 0$  פתרון יחיד. הוכיחו או הפריכו:

- א.  $A$  הפיכה.
- ב. למערכת ההומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A^T$  פתרון יחיד.
- ג. לכל מערכת לא הומוגנית עם מטריצת מקדמים  $A$  פתרון יחיד.

**(20)** תהי  $A_{m \times n}$  מטריצה ממשית כך ש- $m < n$ . הוכיחו או הפריכו:

- א. ממד מרחב הפתרונות של המערכת  $Ax = 0$  הוא  $n - m$ .
- ב. למערכת  $(A^T A)x = 0$  יש אינסוף פתרונות.
- ג. ייתכן מצב בו למערכת  $(A^T A)x = 0$  יש פתרון יחיד.
- ד. ייתכן מצב בו למערכת  $(AA^T)x = 0$  יש פתרון יחיד.

**(21)** תהי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n$ , כך שלכל מטריצה ריבועית  $B \neq 0$  מסדר  $n$ , מתקיים  $AB \neq 0$ . הוכיחו ש- $\text{rank}(A) = n$ .

**(22)** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $m \times n$ .

לגבי כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה או לא. נמקו.

- א. אם למערכת  $Ax = b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ ,
- אז בהכרח למערכת  $A^T x = b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .
- ב. עבור  $m = n$ , אם למערכת  $Ax = b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ ,
- אז בהכרח למערכת  $A^T x = b$  יש פתרון לכל  $b \in \mathbb{R}^m$ .
- ג. אם למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  יש אינסוף פתרונות, אז בהכרח  $m < n$ .
- ד. ייתכן ש- $A^T A = I_n$  וגם  $AA^T = I_m$ .
- ה. אם  $m \neq n$  ואם למערכת  $Ax = 0$  יש פתרון יחיד, אז יש מערכת לא הומוגנית  $Ax = b$  עם יותר מפתרון אחד.

**(23)** תהא  $A \in M_{4 \times 4}(R)$  ויהי  $b \in R^4$ .

ידוע כי  $u$  ו- $v$  פתרונות של המערכת הלא הומוגנית  $Ax = b$ .

- א. נגדיר  $w = \alpha u + \beta v$ .
- הוכיחו כי אם גם  $w$  פתרון של המערכת  $Ax = b$ , אז  $\alpha + \beta = 1$ .
- ב. נניח בנוסף כי  $w = -u + 2v$  הוא פתרון של המערכת  $A^2 x = b$ .
- הוכיחו כי  $A - I$  לא הפיכה.

$$(24) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & -6 & 3 & -8 & -8 \end{pmatrix}, \text{ ויהי } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

א. הראו כי  $v = (2, -1, 1, -1, 1)^T$  הוא פתרון של המערכת  $Ax = b$ .

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

ג. מצאו  $C, D \in M_{5 \times 2}(\mathbb{R})$ , כך ש- $C \neq D$  ו- $AC = AD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ .

## תשובות סופיות

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{א. (1)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{ב. (2)}$$

$$4x - 2y + 4z = 1$$

$$x - y + z = 2 \quad (2)$$

$$x - 6y + 3z = 3$$

$$-2y + 4z = 1$$

$$x - 5y + z = 2 \quad (3)$$

$$x - 6y - z = 3$$

$$(4+k)x - 2y + 4z = 1$$

$$x + (k-1)y + z = 2 \quad (4)$$

$$x - 6y + (3+k)z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0 \quad (5)$$

$$x - 6y + 2z = 0$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-2x - 3y - 6z = 6 \quad (6)$$

$$4x + y + z = 9$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (7)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (8)$$

$$(9) \text{ שאלת הוכחה.}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$(11) \text{ אם } k \neq 2 \text{ או } k \neq -1, \text{ אז יש פתרון אחד.}$$

$$\text{אם } k = 2, \text{ אז יש אינסוף פתרונות.}$$

$$\text{אם } k = -1, \text{ אז אין פתרונות.}$$

$$(12) \quad m = 5, k = 9$$

$$(13) \text{ שאלת הוכחה.}$$

14) סכום האיברים בכל שורה של  $A^{-1}$  הוא קבוע השווה ל- $\frac{1}{k}$ .

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) א. שאלת הוכחה. ב.  $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t, -2s, s, -t, t)$ .

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (t=s=0) \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t=s=1) \quad \text{ג.}$$

## מטריצות סימטריות ומטריצות אנטי-סימטריות

### שאלות

מטריצה ריבועית  $A$  תיקרא סימטרית אם  $A^T = A$ , ואנטי-סימטרית אם  $A^T = -A$ .

- (1) ידוע ש- $A$  מטריצה ריבועית.  
מי מבין הבאים נכון (אחד או יותר):
  1.  $AA^T$  סימטרית.
  2.  $A + A^T$  סימטרית.
  3.  $A - A^T$  אנטי-סימטרית.
- (2) ידוע ש- $A$  ו- $B$  אנטי-סימטריות מאותו סדר.  
מי מבין הבאים נכון:
  1.  $BABABA$  אנטי-סימטרית.
  2.  $A^2 - B^2$  סימטרית.
  3.  $A^2 + B$  סימטרית.
- (3) ידוע ש- $A$  ו- $B$  סימטריות מאותו סדר ונתון כי  $AB = -BA$ .  
מי מבין הבאים נכון:
  1.  $AB^3$  אנטי-סימטרית.
  2.  $AB^2$  סימטרית.
  3.  $(A - B)^2$  סימטרית.
- (4) ידוע ש- $A$  סימטרית ו- $B$  אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי  $AB = BA$ .  
הוכיחו:
  1.  $AB$  אנטי-סימטרית.
  2.  $AB + B$  אנטי-סימטרית.
- (5) נתון:  $A, B, AB$  סימטריות מאותו סדר.  
הוכיחו כי  $A^4 B^4 = B^4 A^4$ .

### תשובות סופיות

- (1) 1,2,3
- (2) 2
- (3) 1,2,3
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.

## דרגה של מטריצה

### שאלות

(1) אמתו את המשפט  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ ,

על המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 14 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

(2) אמתו את המשפט  $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ ,

עבור  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ו-  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) נתונה המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10-k \end{pmatrix}$

חשבו את  $\text{rank}(A)$ .

(4) נתון כי  $A$  מטריצה ריבועית מסדר  $n > 1$ . הוכיחו או הפריכו:

א.  $\text{rank}(A) = n-1 \Rightarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

ב.  $\text{rank}(A) = n-1 \Leftarrow \text{rank}(A^2) = n-1$

(5) נתון כי  $A, B$  מטריצות ריבועיות מסדר  $n > 1$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$ , אז בהכרח  $B$  הפיכה.

ב. ייתכן ש-  $\text{rank}(A) < \text{rank}(AB)$ .

ג. אם  $\text{rank}(A) > \text{rank}(B)$ , אז  $\text{rank}(AB) > \text{rank}(B)$ .

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את  $\text{rank}(A)$ ,  $\text{rank}(B)$ .

ב. חשבו את  $\text{rank}(B^{10}A^{14})$ .

(7) נניח כי  $A, B$  שתי מטריצות ריבועיות מסדר  $n$ .

$$\text{הוכיחו כי } \text{rank} \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \leq 2\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

(8) תהי  $A_{8 \times 7}$  מטריצה, כך ש- $\text{rank}(A) = 3$ .

הוכיחו כי קיימות 3 מטריצות  $A_1, A_2, A_3$ , שלכל אחת מהן דרגה 1,

$$\text{כך ש-} A = A_1 + A_2 + A_3.$$

הראו כי לא ניתן לקבל זאת עם פחות מ-3 מטריצות.

הכלילו את תוצאת התרגיל למטריצה מסדר  $m \times n$  שדרגתה  $k$ .

(9) נתונות שתי מטריצות  $A_{3 \times 5}, B_{5 \times 3}$ .

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

$$\text{א. } \text{rank}(AB) = \text{rank}(BA)$$

$$\text{ב. } \text{rank}(AB) \neq \text{rank}(BA)$$

ג. המטריצה  $BA$  לא הפיכה.

(10) תהי  $A$  מטריצה מסדר  $m \times n$ , ותהי  $B$  מטריצה מסדר  $n \times m$ . הוכיחו:

$$\text{א. אם } AB = I_m \text{ אז } \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = m$$

$$\text{ב. אם } BA = I_n \text{ אז } \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = n$$

$$\text{ג. אם } AB = I_m \text{ וגם } BA = I_n \text{ אז בהכרח } m = n$$

$$\text{ד. אם } A \text{ לא ריבועית אז לא ייתכן שגם } AA^T = I_m \text{ וגם } A^T A = I_n$$

(11) בשדה  $F$  נתונים  $a_1, a_2, \dots, a_m$  איברים, שלא כולם אפס, ו- $b_1, b_2, \dots, b_n$  איברים, שלא כולם אפס.

$$\text{קבעו מהי דרגתה של המטריצה } M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \text{ כאשר } m_{ij} = a_i b_j.$$

**12)** תהי  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  מטריצה שהאיברים שלה נתונים על ידי:  $a_{ij} = b_i^2 - b_j^2$ ,

כאשר  $b_1, b_2, \dots, b_n$  מספרים ממשיים שונים ו-  $n \geq 3$ .

א. הוכיחו שהמטריצה לא הפיכה.

ב. האם הטענה תישאר נכונה אם נשנה את הנתון ל-  $n \geq 2$ ?  
הוכיחו או הפריכו.

**13)** תהיינה  $A, B$  מטריצות מעל  $\mathbb{R}$ , מסדר  $m \times n$ , כך שלכל  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{x} \neq \underline{0}$ ,

מתקיים  $A\underline{x} \neq B\underline{x}$ .

מה הדרגה של המטריצה  $A - B$ ?

**14)** תהיינה  $A, B$  מטריצות מסדר  $n \times n$ .

א. נתון שכל פתרון של המערכת  $(AB)\underline{x} = \underline{0}$ , הוא פתרון של המערכת

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

הוכיחו שהדרגה של  $AB$  שווה לדרגה של  $A$ .

ב. הוכיחו: אם  $A$  הפיכה, אז  $\rho(AB) = \rho(A)$ .

ג. הוכיחו שאם  $\rho(AB) < \rho(A)$ , אז  $A$  לא הפיכה.

**15)** תהי  $A$  מטריצה מסדר  $n \times n$ .

א. הוכיחו כי  $P(A) \subseteq P(A^2)$ .

ב. נתון כי  $\rho(A^2) < \rho(A)$ .

הוכיחו שקיים  $v \in \mathbb{R}^n$ , כך ש-  $Av \neq 0$  וגם  $A^2v = 0$ .

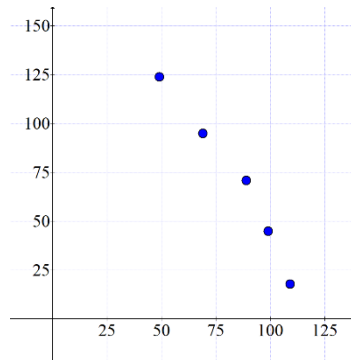
### תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
- (2) שאלת הוכחה.
- (3) אם  $k=1$ , אז  $\text{rank}(A)=2$  אם  $k=4, k=10$ , אז  $\text{rank}(A)=3$ .  
אם  $k \neq 1, 4, 10$ , אז  $\text{rank}(A)=4$ .
- (4) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה נכונה.
- (5) א. הטענה אינה נכונה. ב. הטענה אינה נכונה. ג. הטענה אינה נכונה.
- (6) א.  $\text{rank}(A)=2$ ,  $\text{rank}(B)=3$ . ב.  $\text{rank}(B^{10}A^{14})=2$ .
- (7) שאלת הוכחה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) שאלת הוכחה.
- (10) שאלת הוכחה.
- (11) 1
- (12) שאלת הוכחה.
- (13)  $n$
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.

## שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה ליניארית

### שאלות

- 1) נתונות חמש נקודות במישור:  $(-4, -1)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(4, 5)$ ,  $(5, 6)$ . מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.
- 2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.



| $price(x)$ | $Demand / sales(y)$ |
|------------|---------------------|
| 49\$       | 124                 |
| 69\$       | 95                  |
| 89\$       | 71                  |
| 99\$       | 45                  |
| 109\$      | 18                  |

- א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.
- ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54\$.
- ג. מה משמעות השיפוע של הישר?
- ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

### תשובות סופיות

- 1)  $f(x) = 0.8x + 2$
- 2) א.  $f(x) = -1.7x + 211$  ב. 119.2 יחידות.
- ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1\$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.
- ד. 14.41

# שיטות כמותיות

פרק 5 - אלגברה ליניארית - דטרמיננטות

תוכן העניינים

- 1. חישוב דטרמיננטות ..... 58
- 2. כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות ..... 61
- 3. מטריצה צמודה ומטריצה הפוכה ..... 62

## חישוב דטרמיננטות

## שאלות

בשאלות 1-5 חשבו את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{array}{lll} \text{(1)} \quad \text{א.} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} & \text{ב.} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} & \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \text{(2)} \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} & \text{ב.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \text{ג.} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \text{(3)} \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} & \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix} & \text{ג.} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

(4) חשבו את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} & \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} & \text{ג.} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

בשאלות 5-6 חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{array}{ll} \text{(5)} \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix} & \text{(6)} \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix} \end{array}$$

בשאלות 7-8 הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

$$\begin{array}{lll} \text{(7)} \quad \text{א.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} & \text{ב.} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} & \text{ג.} \begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix} \\ \text{(8)} \quad \text{א.} \begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \text{ב.} \begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix} \end{array}$$

בשאלות 9-11 נתון כי  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$ .

חשבו :

$$\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} \quad (10) \qquad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \quad (12) \text{ הוכיחו כי :}$$

בשאלות 13-14 נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות מסדר 3,  $|B|=2$ ,  $|A|=4$ .  
חשבו :

$$(13) \text{ א. } |ABA^{-1}B^T| \quad \text{ב. } |4A^2B^3|$$

$$(14) \text{ א. } |-A^{-2}B^T A^3| \quad \text{ב. } |-2A^2 A^T \text{adj} B|$$

(15) נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 4,  $2AB+3I=0$ ,  $|A|=2$ .  
חשבו את  $|B|$ .

(16) נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות הפיכות מסדר 3,  $B^2-2A^{-1}=0$ ,  $A+3B=0$ .  
חשבו את  $|A|$ ,  $|B|$ .

(17) נתון כי  $A$  מטריצה מסדר  $n$ ,  $|A|=128$ ,  $2AB=B^T A^2$ , ו- $B$  הפיכה.  
מצאו את  $n$ .

## תשובות סופיות

- (1) א.  $ad - bc$     ב. 29    ג. -1
- (2) א. -1    ב. -3    ג. -14
- (3) א. 24    ב. 234    ג. -300
- (4) א. 0    ב. 0    ג. 3
- (5) 120
- (6) 114
- (7) פתרונות באתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)
- (8) פתרונות באתר.
- (9) -8
- (10) 16
- (11) -36
- (12) הוכחה.
- (13) א. 4    ב.  $2^{13}$
- (14) א. -8    ב.  $-2^{11}$
- (15)  $\frac{81}{32}$
- (16)  $|A|=18, |B|=-2/3$
- (17) 7

## כלל קרמר ופתרון מערכת משוואות

### שאלות

בשאלות 1-3 פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x + 4y &= 11 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x + z &= 3 \\ 4x + y + 8z &= 21 \\ 2x + 3z &= 8 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x + 2z + 5t &= 8 \\ -2x - 6y &= -8 \\ 5x + 3y - 7z + 4t &= 5 \\ 2x + 5y + 44z &= 51 \end{aligned} \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$\begin{aligned} (1) \quad x &= 1, y = 2 \\ (2) \quad x &= 1, y = 1, z = 2 \\ (3) \quad x &= y = z = t = 1 \end{aligned}$$

## מטריצה צמודה קלאסית ומטריצה הפוכה

### שאלות

בשאלות 1-3 חשבו את הצמודה הקלאסית  $adj(A)$ , ובעזרתה את  $A^{-1}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$adj(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

## שיטות כמותיות

פרק 6 - אלגברה ליניארית - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ולכסון מטריצות

תוכן העניינים

1. ערכים עצמיים וקטורים עצמיים ולכסון מטריצות.....63

## ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

### שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4 מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{עבור המטריצה } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} :$$

- א. מצאו מטריצה אופיינית.
- ב. מצאו פולינום אופייני.
- ג. מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- ד. מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- ה. מצאו וקטורים עצמיים.
- ו. קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
- כלומר, מצאו מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש- $P^{-1}AP = D$ , באשר  $D$  מטריצה אלכסונית.
- ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו  $A^{2009}$ .
- ט. מצאו את הפולינום המינימלי.
- י. קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
- במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את  $A^{-1}$  בעזרת  $A$  ו- $I$  בלבד, תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$(6) \quad \text{נתון } A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

לאיזה ערך של הפרמטר  $k$  המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה  $A$ ?

$$(7) \quad \text{נתונה המטריצה הממשית } A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

- א. מצאו את ערכי  $a$  ו- $b$ , עבורם הע"ע-ים של  $A$  יהיו 1 ו-1 בלבד.  
 ב. עבור ערכי  $a$  ו- $b$  שנמצאו בסעיף א, קבעו האם המטריצה לכסינה.

(8) תהי  $A$  מטריצה ממשית ריבועית מסדר  $3 \times 3$ .

$$\text{ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם } v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{והם מתאימים לערכים העצמיים } \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -4.$$

מצאו את המטריצה  $A$ .

(9) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר  $3 \times 3$ , בעלת וקטורים עצמיים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

(10) הוכיחו או הפריכו:

- א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.  
 ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.  
 ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה  $A$  אשר הווקטור  $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$  הוא ו"ע שלה, השייך לע"ע 14.

**(11) נתונה מטריצה ריבועית  $A$ .**

הוכיחו או הפריכו:

א.  $0$  ערך עצמי של המטריצה  $A$  אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.ב. אם  $A$  הפיכה ו- $\lambda$  ע"ע של  $A$ , אז  $\frac{1}{\lambda}$  הוא ערך עצמי של  $A^{-1}$ .ג. ל- $A$  ול- $A^T$  יש את אותו פולינום אופייני.ד. ל- $A$  ול- $A^T$  יש את אותם וקטורים עצמיים.ה. אם סכום האיברים בכל שורה של  $A$  הוא  $\lambda$ , אז  $\lambda$  הוא ע"ע של  $A$ .ו. אם  $A^{-1} = A^T$  ואם  $\lambda$  הוא ע"ע של  $A$ , אז  $\lambda = \pm 1$ .ז. אם  $A^2 = A$  ואם  $\lambda$  הוא ע"ע של  $A$ , אז  $\lambda = 0$  או  $\lambda = 1$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \text{ ערכים עצמיים: } x_1 = 2, x_{2,3} = 3$$

$$\text{וקטורים עצמיים: } v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0), v_{x=2} = (1, 1, 1)$$

$$(2) v_{x=-2} = (-1, 1, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=1} = (-1, 4, 1), x = 1, x = 3, x = -2$$

$$(3) v_{x=-1} = (-1, 0, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=1} = (1, -2, 1), x = 1, x = 4, x = -1$$

$$(4) v_{x=3} = (1, 2), v_{x=1} = (-1, 2), x = -1, x = 3$$

$$(5) \text{ א. } \begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix} \text{ ב. } p(x) = (x-6)(x-2)(x+4)$$

$$\text{ג. } x = 6, x = 2, x = -4$$

$$x = -4 - \text{ריבוב אלגברי: } 1, x = 2 - \text{ריבוב אלגברי: } 1, x = 6 - \text{ריבוב אלגברי: } 1.$$

$$\text{ד. } V_{x=6} = sp\{\langle 0, 0, 1 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=2} = sp\{\langle 1, 1, 1 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$V_{x=-4} = sp\{\langle -1, 1, 0 \rangle\} - \text{ריבוב גיאומטרי: } 1.$$

$$\text{ה. } \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \text{ו. ניתנת ללכסון.} \quad \text{ז. } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ח. } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix} \quad \text{ט.}$$

$$m(x) = (x-6)(x-2)(x+4)$$

י. הפיכה.

$$(6) k_1 = 3, k_2 = -\frac{32}{9}$$

$$(7) \text{ א. } a = 3, b = -4 \text{ או } a = 1, b = 0 \quad \text{ב. לא לשתייה.}$$

$$(8) A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(9) \text{ אין כזו מטריצה.}$$

$$(10) \text{ א. הפרכה: } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ב. } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ג. } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ד. הוכחה.}$$

$$(11) \text{ א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.}$$

$$\text{ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.}$$

# שיטות כמותיות

פרק 7 - אלגברה ליניארית - דימיון מטריצות

תוכן העניינים

1. דימיון מטריצות ..... 67

## דימיון מטריצות

### שאלות

(1) ידוע ש- $A$  ו- $B$  מטריצות דומות. הוכיחו כי:

א.  $|A| = |B|$

ב.  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

ג. ל- $A$  ו- $B$  אותו פולינום אופייני.

(2) הוכיחו באינדוקציה: אם  $P^{-1}AP = B$ , אז  $A^n = PB^nP^{-1}$ .

(3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. ידוע כי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $n$  וידוע כי  $A$  דומה למטריצה  $4A$ . הוכיחו כי  $A$  מטריצה לא הפיכה.

ב. הוכיחו שהמטריצות  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ו- $4A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  דומות.

(4) נתונות שתי מטריצות ממשיות:  $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 9 & -17 & 6 \end{pmatrix}$ .

האם קיימים קבועים ממשיים  $a, b$ , כך שהמטריצה  $A$  דומה למטריצה  $B$ ?

(5) נתונות שלוש מטריצות ריבועיות מסדר  $n$ :  $A, B, C$ . הוכיחו כי:

א.  $A$  דומה לעצמה.

ב. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $B$  דומה ל- $A$ .

ג. אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $B$  דומה ל- $C$ , אז  $A$  דומה ל- $C$ .

ד. אם  $A$  דומה ל- $B$  ושתייהן הפיכות, אז  $A^{-1}$  דומה ל- $B^{-1}$ .

ה. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $A^k$  דומה ל- $B^k$ , לכל  $k$  טבעי.

ו. אם  $A$  דומה ל- $B$  ו- $q(x)$  פולינום, אז  $q(A)$  דומה ל- $q(B)$ .

ז. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $A^T$  דומה ל- $B^T$ .

ח. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

ט. אם  $A$  דומה ל- $B$ , אז  $\text{Nullity}(A) = \text{Nullity}(B)$ .

**הערה** –  $\text{Nullity}(A) =$  מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ .

(6) הוכיחו או הפריכו :

- א. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום אופייני, הן דומות.  
 ב. אם לשתי מטריצות מסדר 3 אותו פולינום מינימלי, הן דומות.  
 ג. אם לשתי מטריצות אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות.

ד. המטריצות הבאות דומות  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7) ידוע שלמטריצה ריבועית  $A$  מסדר 3 יש ערכים עצמיים 0, 1 ו-2. חשבו כל אחד מהבאים או הסבירו מדוע לא ניתן לעשות זאת :

א.  $\text{rank}(A)$

ב.  $\dim \text{Ker}(A)$

ג.  $\text{tr}(A)$

ד.  $|A^T A|$

ה. ע"ע עבור  $A^T A$ .

ו. ע"ע עבור  $(4A^2 + 10A + I)^{-1}$ .

**הערה**  $\dim \text{Ker}(A) = \text{Nullity}(A)$

(8) הוכיחו כי למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

(9) ענו על הסעיפים הבאים :

- א.  $A$  ו- $B$  שתי מטריצות הדומות למטריצה  $C$ .  
 הוכיחו כי  $A$  דומה ל- $B$ .

ב. הוכיחו שהמטריצות הבאות דומות:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(10) עבור אילו ערכים של  $x$  המטריצות הבאות דומות :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & x & 2 \end{pmatrix}$$

**(11)** הוכיחו שכל אחת מהמטריצות הבאות אינה דומה לאף אחת מהאחרות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**(12)** נתונות שתי מטריצות  $A, B \in M_n[\mathbb{R}]$ .

נתון כי  $A$  ניתנת ללכסון.

הוכיחו:

$B$  דומה ל- $A$  אם ורק אם  $B$  ניתנת ללכסון והיא בעלת אותם ע"ע כמו של  $A$ .

**(13)** נתונות המטריצות  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ו- $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$  כאשר  $a, b \in \mathbb{R}$ .

עבור אילו ערכים של  $a$  ו- $b$  המטריצות  $A$  ו- $B$  דומות?

**(14)** נתונות המטריצות  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$  ו- $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  כאשר  $a \in \mathbb{R}$ .

קבעו האם קיימת מטריצה הפיכה  $P$  כך ש- $P^{-1}AP = B$ .

**(15)** נתונות המטריצות  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$  ו- $B = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

קבעו האם המטריצות דומות. אם כן, מצאו מטריצה הפיכה  $P$ , כך ש-

$$P^{-1}AP = B$$

**(16)** תהיינה  $A, B$  מטריצות ב- $M_n(\mathbb{R})$ , בעלות דרגה 1, וכן  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = k$ , כאשר

$k$  מספר ממשי שונה מ-0.

א. מצאו את הפולינום האופייני של  $A$  ו- $B$ .

ב. הוכיחו ש- $A$  ו- $B$  דומות.

**(17)** תהי  $A$  מטריצה מסדר  $3 \times 3$  עם פולינום אופייני  $p(t) = (t-1)(t+4)^2$ , ונתון כי  $\rho(4I + A) = 1$ .

- א. רשמו את הפולינום האופייני של  $A^2$ .  
 ב. הוכיחו שהמטריצה  $A^4 - 10A + 9I$  לא הפיכה, ומצאו את ממד מרחב הפתרונות של המערכת  $(A^4 - 10A + 9I)\underline{x} = \underline{0}$ .

**(18)** נתון כי  $A, B, C, D \in M_n[\mathbb{R}]$  כך ש- $A$  דומה ל- $B$  ו- $C$  דומה ל- $D$ . הוכיחו או הפריכו:

- א.  $A + C$  דומה ל- $B + D$ .  
 ב.  $AC$  דומה ל- $BD$ .

**(19)** הוכיחו או הפריכו:

- א. אם שתי מטריצות שקולות שורה אז הן דומות.  
 ב. אם שתי מטריצות הן דומות אז הן שקולות שורה.

**(20)** ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו: אם  $A$  דומה ל- $B$  אז  $A - kI$  דומה ל- $B - kI$ .  
 ב. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. בדקו האם המטריצות הבאות דומות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**(21)** נתון כי  $A$  ו- $B$  מטריצות דומות. הוכיחו של- $A$  ו- $B$  אותם ערכים עצמיים עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי זהה.

**(22)** תהי  $A$  מטריצה ממשית מסדר  $7 \times 7$ , בעלת דרגה 4. נתון שהפולינום  $q(t) = t^4 - 7t^2 + 10$  מחלק את הפולינום האופייני  $p(t)$  של  $A$ . מצאו את הפולינום האופייני של  $A$ .  
 א. הוכיחו ש- $A$  לכסינה ומצאו מטריצה אלכסונית שדומה לה.  
 ב. מצאו את  $\text{tr}(A^2)$ .

(23) נתונות שתי מטריצות  $A, B \in M_n(R)$ .

הוכיחו או הפריכו :

א. אם  $B+I$  דומה ל-  $I-A$  אז  $A^2$  דומה ל-  $B^2$ .

ב. אם ל-  $A$  ול-  $B$  אותה דרגה, אותו פולינום אופייני, אותה דטרמיננטה ואותו סכום איברי אלכסון (trace) אז הן בהכרח דומות.

### תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

(4) לא.

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) א. 2    ב. 1    ג. 3    ד. 0    ה. לא ניתן לחשב.    ו.  $\frac{1}{15}, \frac{1}{37}$

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10)  $x=0$

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13)  $a=0$  ו-  $b=-2$

(14) כן, עבור  $a=\pm 2$

(15) המטריצות דומות ו-  $P$  מטריצה שהאלכסון המשני שלה 1 ושאר האיברים 0.

(16) א.  $p_A(t) = p_B(t) = t^n - kt^{n-1}$     ב. שאלת הוכחה.

(17) א.  $p(x) = (x-1)(x-16)^2$     ב. ממד מרחב הפתרונות הוא 1.

(18) שאלת הוכחה.

(19) שאלת הוכחה.

(20) א. שאלת הוכחה.    ב. לא דומות.    ג. לא דומות.

(21) שאלת הוכחה.

(22) א.  $D = \text{diag}(0, 0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, -\sqrt{5})$     ב.  $\text{tr}(A^2) = 14$

(23) שאלת הוכחה.

# שיטות כמותיות

פרק 8 - אלגברה ליניארית - העתקות ליניאריות

תוכן העניינים

- 1. העתקות ליניאריות..... 72
- 2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות..... 74
- 3. העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם..... 77
- 4. פעולות עם העתקות ליניאריות..... 81

## העתקות ליניאריות

### שאלות

בשאלות 1-15, קבעו, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה ליניארית:

$$T(x, y) = (x + y, x - y) ; \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$T(x, y, z) = (2x + z, |y|) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

$$T(x, y) = (xy, y, z) ; \quad T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4)$$

$$T(x, y, z) = (x + 1, x + y, y + z) ; \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (5)$$

$$(B \in M_n[\mathbb{R}]) \quad T(A) = BA + AB ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (6)$$

$$T(A) = A + A^T ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (7)$$

$$T(A) = |A| \cdot I ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (8)$$

$$T(A) = A \cdot A^T ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (9)$$

$$T(A) = A^{-1} ; \quad T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (10)$$

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2 ; \quad T : P_3[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}] \quad (11)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) ; \quad T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad (12)$$

$$T(p(x)) = p'(x) + p''(x) ; \quad T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad (13)$$

$$T(p(x)) = p^2(x) ; \quad T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_{2n}[\mathbb{R}] \quad (14)$$

$$(F = C, F = R) \quad T(z) = \bar{z} ; \quad T : C[F] \rightarrow C[F] \quad (15)$$

**16** עבור איזה ערך של הקבוע  $m$  (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה ליניארית:

$$T(x, y) = (m^2 x^{2m}, y^{2m} + x) ; T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

בשאלות **17-20**, קבעו האם קיימת העתקה ליניארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצאו את ההעתקה וקבעו האם היא יחידה. אם לא, נמקו מדוע.

**17**  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  כך ש-  $T(1, 1, 0) = (1, 2, 3)$ ,  $T(0, 1, 1) = (4, 5, 6)$ ,  $T(0, 0, 1) = (7, 8, 9)$

**18**  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  כך ש-  $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$ ,  $T(0, 1, 1) = (1, 2, 1)$ ,  $T(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$

**19**  $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  כך ש-

$$T(1, 2, -1, 0) = (0, 1, -1), T(-1, 0, 1, 1) = (1, 0, 0), T(0, 4, 0, 2) = (2, 2, -2)$$

**20**  $T: P_2[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}]$  כך ש-  $T(1) = 4$ ,  $T(4x + x^2) = x$ ,  $T(1 - x) = x^2 + 1$

$$T(1, 0, 0) = (a_1, a_2, a_3)$$

**21** נתונה העתקה ליניארית  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , המקיימת:

$$T(0, 1, 0) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$T(0, 0, 1) = (c_1, c_2, c_3)$$

א. הוכיחו שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

**22** נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$  קבוצה בת"ל, אז  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  קבוצה בת"ל.

ב. אם  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  קבוצה בת"ל, אז  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$  קבוצה בת"ל.

## תשובות סופיות

|        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1) כן  | 2) כן  | 3) לא  | 4) לא  | 5) לא  |
| 6) כן  | 7) כן  | 8) לא  | 9) לא  | 10) לא |
| 11) כן | 12) כן | 13) כן | 14) לא | 15) לא |
| 16) כן | 17) כן | 18) כן | 19) כן | 20) כן |

21) שאלת הוכחה. 22) שאלת הוכחה.

## גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-6, מצאו :

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y - 4z + t, 4x + y + 4z - t), \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - 4y - z, x + y, y - z, x + 4z), \quad T: R^3 \rightarrow R^4 \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A, \quad T: M_2[R] \rightarrow M_2[R] \quad (4)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x+4), \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R] \quad (5)$$

$$D(p(x)) = p'(x), \quad D: P_3[R] \rightarrow P_3[R] \quad (6)$$

$$(7) \quad \text{מצאו העתקה ליניארית } T: R^3 \rightarrow R^3, \\ \text{אשר תמונתה נפרשת על ידי: } \{(4, 1, 4), (-1, 4, 1)\}.$$

$$(8) \quad \text{מצאו העתקה ליניארית } T: R^4 \rightarrow R^3, \\ \text{אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: } \{(0, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}.$$

נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow U$ .

$$(9) \quad \text{הוכיחו כי אם } \dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T) \text{ אז הממד של } V \text{ זוגי.}$$

(10) הוכיחו או הפריכו :

א. קימת העתקה ליניארית  $T: R^5 \rightarrow R^5$  שעבורה  $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$ .

ב. קימת העתקה ליניארית  $T: R^4 \rightarrow R^4$  שעבורה  $\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Im}(T)$ .

**11** ידוע שהעתקה ליניארית  $T: V \rightarrow W$ ,  
מקיימת:  $\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \operatorname{Ker}(T)$ ,  $\dim(W) = 4$ .  
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של  $V$ ?

א. 10

ב. 9

ג. 7

ד. 6

ה. כל התשובות לא נכונות.

**12** הוכיחו או הפריכו:א. לכל העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$  מתקיים  $\operatorname{Im}(T^2) \subseteq \operatorname{Im}(T)$ .ב. לכל העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$  שמקיימת:

$$T = T^2, \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(T^2), \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker}(T^2)$$

ג. לכל העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$ , המקיימת  $\operatorname{Im}(T) \subseteq \operatorname{Ker}(T)$ ,אז בהכרח  $T = 0$ .**13** מטריצה  $A_{m \times n}$  מגדירה העתקה  $T: R^n \rightarrow R^m$ ;  $T(x) = Ax$ ,ואילו  $A_{n \times m}^T$  מגדירה העתקה  $S: R^m \rightarrow R^n$ ;  $S(y) = A^T y$ .הראו כי  $\operatorname{Im}(T) = (\operatorname{Ker}(S))^\perp$ .

## תשובות סופיות

(1) גרעין – בסיס :  $\{(0,0,1,4)\}$ , מימד : 1. תמונה – כל בסיס של  $\mathbb{R}^3$ , מימד : 3.

(2) גרעין – בסיס :  $\{(0,0,0)\}$ , מימד : 0.

תמונה – בסיס :  $\{(1,1,0,1), (0,5,1,4), (0,0,-6,21)\}$ , מימד : 3.

(3) גרעין – בסיס :  $\{(-7,3,0,1), (1,-2,1,0)\}$ , מימד : 2.

תמונה – בסיס :  $\{(1,1,2), (0,1,2)\}$ , מימד : 2.

(4) גרעין – בסיס :  $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ , מימד : 2.

תמונה – בסיס :  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ , מימד : 2.

(5) גרעין – בסיס :  $\{p(x)=1\}$ , מימד : 1.

תמונה – בסיס :  $\{p(x)=2x+5, p(x)=1\}$ , מימד : 2.

(6) גרעין – בסיס :  $\{p(x)=1\}$ , מימד : 1.

תמונה – בסיס :  $\{p(x)=x^2, p(x)=x, p(x)=1\}$ , מימד : 3.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$T(x, y, z, t) = (-x - y + z, -2x - y + t, 0) \quad (8)$$

(9) שאלת הוכחה.

(10) לא.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

## העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

### שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-4, קבעו האם היא חח"ע<sup>1</sup>, האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.  
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצאו אותה.

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, z - x) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x + 2z) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (2)$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b, b - 2c) \quad , \quad T: P_2[R] \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3 \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow P_3[R] \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית } T: R^4 \rightarrow R^3 ?$$

$$(6) \quad \text{נתונה העתקה ליניארית } T: U \rightarrow V \text{ הוכיחו:}$$

- א. אם  $\dim(U) < \dim(V)$ , אז  $T$  לא על.
- ב. אם  $\dim(U) > \dim(V)$ , אז  $T$  לא חח"ע.
- ג. אם  $\dim(U) = \dim(V)$ , אז  $T$  חח"ע  $\Leftrightarrow T$  על.

$$(7) \quad \text{נתונה העתקה ליניארית } T: V \rightarrow W \text{ הוכיחו או הפריכו:}$$

- א. אם  $\dim \text{Ker}(T) \neq 0$ , אז ההעתקה  $T$  אינה על.
- ב. אם  $\dim \text{Ker}(T) = 0$  ו- $\dim(V) \leq \dim(W)$ , אז ההעתקה  $T$  היא על.
- ג. אם  $\dim \text{Ker}(T) = 0$  ו- $\dim(V) \geq \dim(W)$ , אז ההעתקה  $T$  היא על.
- ד. אם  $\dim(V) < \dim(W)$ , אז ההעתקה  $T$  חח"ע.

<sup>1</sup> הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

(8) נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow W$ ;  $\{v_1, \dots, v_n\}$  בסיס של  $V$ .  
הוכח או הפרך:

א. אם  $\dim(V) > \dim(W)$  ואם  $T(v_1) = 0$ , אז ייתכן מקרה שבו  $T$  חח"ע.

ב. אם  $\dim(V) > \dim(W)$ , הקבוצה  $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$  בת"ל.

(9) נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow W$ .

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  קבוצה בת"ל ב- $V$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $T$  חח"ע, אז הקבוצה  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$  בת"ל ב- $W$ .

ב. אם הקבוצה  $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$  בת"ל ב- $W$ , אז  $T$  חח"ע.

(10) נתונה העתקה ליניארית  $T: R^n \rightarrow R^m$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $T$  היא איזומורפיזם אז  $m = n$ .

ב. אם  $m > n$ , אז  $T$  חח"ע.

ג. אם  $T(v) = Av$  לכל  $v$ , אז למטריצה  $A$  יש  $n$  שורות ו- $m$  עמודות.

(11) נתונה העתקה ליניארית  $T: V \rightarrow V$ , המקיימת  $\text{Im}(T) = \text{Ker}(T)$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $T$  על, אז בהכרח  $V = \{0\}$ .

ב. אם  $T$  חח"ע, אז בהכרח  $V = \{0\}$ .

ג.  $T$  היא איזומורפיזם.

ד.  $T$  היא העתקת האפס.

(12) נתונה העתקה ליניארית  $T: R^n \rightarrow R^m$ , ונתונה מטריצה  $A_{m \times n}$ ,

כך ש- $T(v) = Av$  לכל  $v \in R^n$ .

הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $v \in \text{Ker}(T)$ , אז  $v \in \text{rowsp}(A)$ .

ב. אם  $v \in \text{rowsp}(A)$ , אז  $v \in \text{Ker}(T)$ .

ג. אם  $v \in \text{colsp}(A)$ , אז  $v \in \text{Im}(T)$ .

ד. אם  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ , אז  $n < m$ .

**13** נתונה העתקה ליניארית  $T: R^n \rightarrow R^n$ , ונתונה מטריצה  $A$ ,

כך ש-  $T(v) = Av$ , לכל  $v \in R^n$ .

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם  $\text{rank}(A) = n$ , אז  $T$  חח"ע.

ב. אם  $\text{rank}(A) = n$ , אז  $T$  על.

ג. אם  $T^2(v) = 0$ , אז  $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$ .

ד. אם  $T^2(v) = 0$ , אז  $\text{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$ .

**14** נתונה העתקה ליניארית  $T: P_3[R] \rightarrow R$ , המוגדרת על ידי  $T(p(x)) = p(1)$ .

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענו על הסעיפים הקודמים עבור  $T: P_n[R] \rightarrow R$ .

**15** נתונה העתקה ליניארית  $T: M_n[R] \rightarrow M_n[R]$ , המוגדרת על ידי  $T(A) = A^T$ .

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצאו את ההעתקה ההפוכה של  $T$ .

## תשובות סופיות

(1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(x, y, z) = \left( \frac{1}{3}(x + y - 2z), \frac{1}{3}(2y - z - x), \frac{1}{3}(z + x + y) \right)$$

(2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

(3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}(a, b, c) = 0.4a + 0.6b + 0.2c + (-0.4a + 0.4b + 0.2c)x + (-0.4c - 0.2b + 0.2a)x^2$$

(4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה :

$$T^{-1}\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = \begin{pmatrix} b+c-d & -a+b+c-d \\ b-d & d \end{pmatrix}$$

(5) לא.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

$$(14) \text{ א. } \operatorname{Ker}(T) = \operatorname{span}\{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}, \dim \operatorname{Ker}(T) = 3$$

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{1\}, \dim \operatorname{Im}(T) = 1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

$$\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{span}\{-1+x, -1+x^2, \dots, -1+x^n\}, \dim \operatorname{Ker}(T) = n$$

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{span}\{1\}, \dim \operatorname{Im}(T) = 1$$

לא חח"ע, כן על.

$$(15) \text{ א. } \operatorname{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \operatorname{Im}(T) = M_n[R]$$

$$\text{ב. חח"ע ועל. } T^{-1}(A) = A^T \text{ ג.}$$

## פעולות עם העתקות לינאריות

### שאלות

בשאלות 1-9, תהינה  $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ו-  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  העתקות לינאריות המוגדרות על ידי:  $S(x, y, z) = (x - z, y)$ ,  $T(x, y, z) = (x, 4x - y, x + 4y - z)$ .

מצאו נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

- |             |              |                |           |          |
|-------------|--------------|----------------|-----------|----------|
| (1) $S + T$ | (2) $4S$     | (3) $4S - 10T$ | (4) $TS$  | (5) $ST$ |
| (6) $T^2$   | (7) $T^{-1}$ | (8) $T^{-2}$   | (9) $S^2$ |          |

### תשובות סופיות

- (1) לא ניתן להגדיר.
- (2)  $4S = 4(x - z, y)$
- (3) לא ניתן להגדיר.
- (4) לא ניתן להגדיר.
- (5)  $ST: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ;  $St(x, y, z) = (z - 4y, 4x - y)$
- (6)  $T^2(x, y, z) = (x, y, 16x - 8y + z)$
- (7)  $T^{-1}(x, y, z) = (x, 4x, -y, 17x - 4y - z)$
- (8)  $T^{-2}(x, y, z) = (x, y, -16x + 8y + z)$
- (9) לא ניתן להגדיר.

# שיטות כמותיות

פרק 9 - אלגברה ליניארית - מטריצות והעתקות לינאריות

תוכן העניינים

- 1. מטריצה שמייצגת העתקה.....82
- 2. מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס.....88
- 3. ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה.....91

## מטריצה שמייצגת העתקה

**הערה :**

כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטורים). לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

### שאלות

(1) נתונים שני בסיסים של  $R^3$  :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_1$ .

סמנו וקטור זה ב-  $[v]_{B_1}$ .

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_2$ .

סמנו וקטור זה ב-  $[v]_{B_2}$ .

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B_1$  לבסיס  $B_2$ .

סמנו מטריצה זו ב-  $[M]_{B_1}^{B_2}$ .

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B_2$  לבסיס  $B_1$ .

סמנו מטריצה זו ב-  $[M]_{B_2}^{B_1}$ .

ה. אשרו את הטענות הבאות :

$$1. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

$$2. [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$3. [M]_{B_1}^{B_2} = \left( [M]_{B_2}^{B_1} \right)^{-1}$$

(2) נתונה העתקה ליניארית:  $T: R^3 \rightarrow R^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$ .

נתונים שני בסיסים של  $R^3$ :

$$B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \quad B_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס  $B_1$ .

סמנו מטריצה זו ב-  $[T]_{B_1}$ .

ב. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס  $B_2$ .

סמנו מטריצה זו ב-  $[T]_{B_2}$ .

ג. אשרו את הטענות הבאות:

$$1. [T]_{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_1}$$

$$2. [T]_{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [T(v)]_{B_2}$$

$$3. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [T]_{B_1} \cdot [M]_{B_1}^{B_2} = [T]_{B_2}$$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשבו את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

ו. מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

ז. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(3) נתונה העתקה ליניארית  $T: R^3 \rightarrow R^3$ .

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס  $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

מהי נוסחת ההעתקה? פתרו בשתי דרכים שונות.

(4) יהיו  $B_1$  ו-  $B_2$  שני בסיסים של המרחב  $R^3$ , ויהי  $T$  אופרטור ליניארי על  $R^3$ .

$$\text{נתון כי: } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ ו- } [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -29 & -45 & 6 \\ 20 & 31 & -4 \\ 13 & 19 & -1 \end{pmatrix}$$

חשבו את  $[M]_{B_2}^{B_1}$  ואת  $[T]_{B_2}$ .

(5) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:

$$, T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

$$. B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ לפי הבסיס:}$$

(6) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה  $D: P_4[R] \rightarrow P_3[R]$ ,  $D(p(x)) = p'(x)$ , לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

(7) נתונה העתקה ליניארית  $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$ . ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

$$. [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ היא:}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(8) נתונה העתקה ליניארית  $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$ . נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,

$$. [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ היא:}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(9) נתונה העתקה ליניארית  $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$ . נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס  $B = \{1, 1-x, x+x^2\}$ ,

$$. [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ היא:}$$

א. מצאו את נוסחת ההעתקה. כלומר, מצאו את  $T(p(x))$ .

\* פתרו בשתי דרכים שונות.

ב. מצאו את  $T^2(p(x))$ .

(10) תהי  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  העתקה ליניארית, ותהי  $A$  מטריצה ממשית,

כך שמתקיים  $T(v) = Av$  לכל  $v \in \mathbb{R}^n$ .

נתון כי  $B$  בסיס ל- $\mathbb{R}^n$  ו- $\text{rank}(A) = n$ .

הוכיחו כי  $[T]_B$  הפיכה.

**11** נתונה העתקה ליניארית  $T: P_3[R] \rightarrow P_3[R]$ .

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. מצאו את נוסחת ההעתקה.

**12** נתונה העתקה ליניארית  $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$ .

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי,

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.

ב. חשבו את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.

ג. מצאו את נוסחת ההעתקה.

**13** נתונה העתקה ליניארית  $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$  ;  $T(a + bx + cx^2) = b + cx$ .

הוכיחו ש- $T$  העתקה נילפוטנטית.

**14** יהי  $V = \mathbb{R}_2[x]$  מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל  $\mathbb{R}$ .

נתון הבסיס  $B = \{1, x, x^2\}$ , ונתונה ההעתקה הליניארית

$$T(p(x)) = xp''(x) - p'(x) ; T: V \rightarrow V$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת  $[T]_B$ .

ב. מצאו בסיס וממד עבור  $\text{Im}(T), \text{Ker}(T)$ .

הערה: בפתרון סעיף זה לא נשתמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות ונוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.

15) נתונות שתי העתקות ליניאריות  $S, T: V \rightarrow V$ .

יהי  $B = \{u, v, w\}$  בסיס ל- $V$ .

$$\text{נתון כי: } \begin{cases} S(u) = u + v \\ S(v) = v + w \\ S(w) = w + u \end{cases}, \begin{cases} T(u) = u - v \\ T(v) = v - w \\ T(w) = w - u \end{cases}$$

א. הוכיחו כי:  $\text{Ker}(S) = \{0\}$ ,  $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$ .

ב. עבור כל אחת מההעתקות קבע האם היא חח"ע ו/או על.

ג. קבעו האם  $\{T(u), T(v), T(w)\}$  פורשת את  $V$ .

ד. קבעו האם  $\{S(u), S(v), S(w)\}$  פורשת את  $V$ .

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } (x, y-x-z, z) \quad \text{ב. } (x, y, z-x-y) \quad \text{ג. } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ד. } [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ה. שאלת הוכחה.}$$

$$(2) \quad \text{א. } [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } [T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ג. הוכחה.}$$

$$\text{ד. לא.} \quad \text{ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3.} \quad \text{ו. 0 עייע יחיד; הוייע שלו: (1, -1, 1).} \quad \text{ז. לא.}$$

$$(3) \quad T(x, y, z) = (x+y, y+z, z-x)$$

$$(4) \quad [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0.5 \\ -0.25 & -1 & 0.75 \end{pmatrix}, \quad [T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -0.75 & 2.75 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (6) \quad [T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad T(p(x)) = p(x+1) \quad ; \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$$

$$(9) \quad \text{א. } T(a+bx+cx^2) = (a+2b-2c) + (2a+4c)x + (2a+b+2c)x^2$$

$$\text{ב. } T^2(a+bx+cx^2) = (a+2c)1 + (10a+8b+4c)x + (8a+6b+4c)x^2$$

$$(10) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(11) \quad \text{א. } \text{Ker}(T) = \text{sp}\{-x+x^3, -1+x^2\}, \quad \text{Im}(T) = \text{sp}\{1+x^2, x+x^3\}$$

$$\text{ב. } T(a+bx+cx^2+dx^3) = (b+d)(1) + (a+c)x + (b+d)x^2 + (a+c)x^3$$

$$(12) \quad \text{א. } \text{Ker}(T) = \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{Im}(T) = \text{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\text{ב. } \text{tr}(T) = 15, \quad \det(T) = 0, \quad \text{rank}(T) = 2$$

$$(13) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

$$(14) \quad \text{א. } [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } B_{\text{Im}(T)} = \{1\}, \quad \dim(\text{Im}(T)) = 1$$

$$B_{\text{Ker}(T)} = \{1, x^2\}, \quad \dim(\text{Ker}(T)) = 2$$

$$(15) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

## מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס

### שאלות

(1) מצאו את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעלקות הליניאריות הבאות,

ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של  $R^n$  :

א.  $T(x, y) = (x + y, y, -x)$  ,  $T : R^2 \rightarrow R^3$

ב.  $T(x, y, z, t) = (4x - y - z + t, x + y + 4z + t)$  ,  $T : R^4 \rightarrow R^2$

(2) נתונה העתקה ליניארית  $T : R^4 \rightarrow R^2$  ;  $T(x, y, z, t) = (x + y, z + t)$

מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעלקה מהבסיס הסטנדרטי של  $R^4$  לבסיס הסטנדרטי של  $R^2$ .

(3) תהי  $T : R^3 \rightarrow R^2$  העתקה ליניארית המוגדרת על ידי :

$$T(x, y, z) = (4x + y - z, x - y + z)$$

חשבו את המטריצה המייצגת את ההעלקה  $T$  מהבסיס

$B_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$  של  $R^3$ , לבסיס  $B_2 = \{(1, 4), (1, 5)\}$  של  $R^2$ .

כלומר, את  $[T]_{B_1}^{B_2}$ .

(4) עבור העתקה ליניארית  $T : R^3 \rightarrow R^2$  מתקיים:  $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ,

כאשר:  $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ,  $B_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$

מצאו את נוסחת ההעלקה.

(5) עבור העתקה ליניארית  $T : R^3 \rightarrow R^2$  מתקיים:  $[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

כאשר  $B_1 = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ ,  $B_2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$

מצאו את נוסחת ההעלקה.

(6) נתונה העתקה ליניארית  $T : P_3[R] \rightarrow P_2[R]$ .

המטריצה שמייצגת את ההעלקה  $T$ , מהבסיס הסטנדרטי של  $P_3[R]$

לבסיס הסטנדרטי של  $P_2[R]$ , נתונה על ידי:  $[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

מצאו את נוסחת ההעלקה.

(7) נתונה העתקה ליניארית  $T: P_2[R] \rightarrow R^3$ , אשר המטריצה המייצגת

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{אותה מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(8) נתונה העתקה ליניארית  $T: M_2[R] \rightarrow P_3[R]$ , שהמטריצה המייצגת אותה

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{מבסיס סטנדרטי לבסיס סטנדרטי היא}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

(9) תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה ליניארית, כך ש- $\dim(V) = n$ ,

ויהיו  $B_1, B_2$  בסיסים סדורים של  $V$ . הוכיחו או הפריכו:

$$[T]_{B_1}^{B_1} = I_n \quad \text{א.}$$

ב. אם  $T$  העתקת זהות, אז בהכרח  $[T]_{B_1}^{B_1} = I_n$ .

ג. אם  $T$  העתקת זהות, אז בהכרח  $[T]_{B_2}^{B_1} [T]_{B_1}^{B_2} = I_n$ .

(10) נתונה העתקה ליניארית  $T: P_2[R] \rightarrow R^3$  המוגדרת על ידי:

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, c)$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס.  
(הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את  $T^{-1}(a, b, c)$ .

ג. חשבו את  $T^4(a + bx + cx^2)$ .

(11) נתונה העתקה ליניארית  $T: M_2[R] \rightarrow P_3[R]$ , המוגדרת על ידי:

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה מבסיס לבסיס.  
(הבסיסים סטנדרטים)

ב. הוכיחו שההעתקה הפיכה וחשבו את  $T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3)$ .

(12) חשבו את  $ST$  ואת  $TS$ , עבור ההעתקות:

$$S(x, y) = (x - y, x + y, y) \quad ; \quad S: R^2 \rightarrow R^3$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b, b - c) \quad ; \quad T: P_2[R] \rightarrow R^2$$

## תשובות סופיות

$$(1) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad [T] = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ ב.}$$

$$(2) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad [T] = \begin{pmatrix} 25 & 0 & -6 \\ -20 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z)$$

$$(5) \quad T(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

$$(6) \quad T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (b + 2c)1 + (2c + 6d)x + (3d)x^2$$

$$(7) \quad T(a + bx + cx^2) = (a + b, b + c, c)$$

$$(8) \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b) + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3$$

(9) שאלת הוכחה.

$$(10) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ א.} \quad T^{-1}(a, b, c) = (a - b + c)1 + (b - c)x + cx^2 \text{ ב.}$$

ג. לא ניתן.

$$(11) \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ב.} \quad T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} b + c - d & -a + b + c - d \\ b - d & d \end{pmatrix}$$

$$(12) \quad ST(a + bx + cx^2) = (a + c, a + 2b - c, b - c)$$

## ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של העתקה

### שאלות

(1) נתונה העתקה ליניארית,  $T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$ ,  $T(X) = PX$  ; כאשר  $P$  מטריצה לא ידועה מסדר 2.

נסמן ב- $W$  את קבוצת כל המטריצות  $P$ , שעבורן המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  היא וקטור עצמי של ההעתקה.  
א. מצאו את  $W$ .  
ב. הוכיחו כי  $W$  היא תת-מרחב של  $M_2[R]$ , ומצאו לה בסיס.

(2) נתונה העתקה ליניארית,  $T: M_{10}[R] \rightarrow M_{10}[R]$ ,  $T(X) = PX$  ; כאשר  $P$  מטריצה לא ידועה מסדר 10.  
ידוע כי  $A$  היא מטריצה הפיכה, שמהווה וקטור עצמי של ההעתקה – המתאים לערך העצמי 4.  
חשבו את  $|P|$ .

(3) מצאו העתקה ליניארית  $T$ , שעבורה המטריצה  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ , היא וקטור עצמי המתאים לערך העצמי 4.

(4) ענו על הסעיפים הבאים:  
א. נתונה העתקה ליניארית  $T(x, y, z) = (4x - y - z, x + 2y - z, x - y + 2z)$ . מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?  
ב. נתונה העתקה ליניארית:  $T: R^3 \rightarrow R^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z - x)$ . מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

(5) נתונה העתקה ליניארית  $T(x, y, z) = (x + z, y, x + z)$ .  
א. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.  
ב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?  
ג. במידה וכן, חשבו  $T^{2009}(x, y, z)$ .

6 נתונה העתקה ליניארית:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} ; T: M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

- א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.  
 ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.  
 ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

ד. במידה והתשובה לסעיף ג' חיובית, חשבו את  $T^{10}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ .

7 נתונה העתקה ליניארית:  $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$  ;  $T(p(x)) = p(x+1)$

- א. מצאו את המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי.  
 ב. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של ההעתקה.  
 ג. האם ההעתקה ניתנת ללכסון?

8 יהי  $V$  מרחב וקטורי מממד  $n$ .

תהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה ליניארית.

- א. הוכיחו ש- $T$  הפיכה אם"ם כל הערכים העצמיים של  $T$  שונים מאפס.  
 ב. הוכיחו כי אם  $T$  הפיכה, אז ל- $T$  ול- $T^{-1}$  יש את אותם וקטורים עצמיים.  
 מה ניתן לומר על הקשר בין הערכים העצמיים של  $T$  ושל  $T^{-1}$ ?

## תשובות סופיות

$$(1) \quad \text{א. } W = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in R \right\} \quad \text{ב. } B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \quad 4^{10} = |P|$$

$$(3) \quad T(X) = 4X \quad T: M_{2 \times 3}(R) \rightarrow M_{2 \times 3}(R)$$

$$(4) \quad \text{א. } v_{\lambda=2} = (1, 1, 1), v_{\lambda=3}^{(1)} = (1, 1, 0), v_{\lambda=3}^{(2)} = (1, 0, 1). \text{ ניתנת לליכסון.}$$

$$\text{ב. ערך עצמי: } x = 0, \text{ וקטור עצמי: } v_{x=0} = (1, -1, 1). \text{ לא.}$$

$$(5) \quad \text{א. } v_{\lambda=0} = (-1, 0, 1), v_{\lambda=1} = (0, 1, 0), v_{\lambda=2} = (1, 0, 1). \text{ ניתנת לליכסון.}$$

$$\text{ג. } T^{2009}(x, y, z) = (2^{2008}x + 2^{2008}z, y, 2^{2008}x + 2^{2008}z)$$

$$(6) \quad \text{א. } [T]_E = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ב. } v_{x=0}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_{x=0}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, v_{x=2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_{x=2}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ג. כן. ד. } T^{10} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \\ 2^9 x + 2^9 z & 2^9 y + 2^9 t \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad \text{א. } [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } v_{\lambda=1} = 1. \quad \text{ג. לא ניתנת לליכסון.}$$

$$(8) \quad \text{שאלת הוכחה.}$$

# שיטות כמותיות

פרק 10 - פונקציות מרובות משתנים - נגזרות חלקיות

תוכן העניינים

|    |                                  |
|----|----------------------------------|
| 94 | 1. נגזרות חלקיות מסדר ראשון..... |
| 96 | 2. נגזרות חלקיות מסדר שני.....   |

## נגזרות חלקיות מסדר ראשון

### שאלות

בשאלות 1-6 חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1) \quad f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3) \quad (רק f_x)$$

$$f(x, y, z) = xy^2z^3 \quad (6) \quad f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$z(x, y) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \quad \text{נתון:} \quad (7)$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} \quad \text{הוכיחו כי}$$

$$f(x, y, z) = e^x \left( y^2 - \frac{1}{z} \right) \quad \text{נתון:} \quad (8)$$

$$\text{חשבו: } \frac{\partial f}{\partial x} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right)$$

### הערת סימון

$$f = f(x, y) \Rightarrow f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2$$

## תשובות סופיות

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (6)$$

(7) שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = -1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \left( 0, -1, \frac{1}{2} \right) = 4 \quad (8)$$

## הערת סימון

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{aligned}$$

## נגזרות חלקיות מסדר שני

### שאלות

בשאלות 1-13 חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3(1-y)(x+y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = xy(x-y) \quad (5)$$

$$f(x, y) = (x-9)(2y-6)(4x-3y+12) \quad (6)$$

$$f(x, y) = e^{xy}(x+y) \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^{x+y}(x^2 + y^2) \quad (8)$$

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (9)$$

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad (10)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad (11)$$

$$f(x, y) = \ln(\sqrt[3]{x^2 + y^2}) \quad (12)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (13)$$

14) חשבו  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x,y) = \ln(xy - x^2 - y^2)$ .

15) חשבו  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ .

16) חשבו  $f'_{xy}(1,1)$ , עבור  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

17) נתון:  $f(x,y) = \frac{x^2}{\ln y + x}$ .

חשבו:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e)$ .

### הערת סימון

$$\begin{array}{lcl}
 f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & & f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\
 f = f(x,y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & & f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\
 f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & & f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21}
 \end{array}$$

## תשובות סופיות

$$f_y = -2x^2y + 10 \quad f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1)$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy \quad f_{yy} = -2x^2$$

$$f_y = \frac{x^4}{y} \quad f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$$

$$f_y = 3y^2 - 6x \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 - 6y \quad (3)$$

$$f_{yx} = -6 \quad f_{xy} = 6 \quad f_{yy} = 6y$$

$$f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y \quad f_{xx} = 6x \quad f_x = 3x^2 + 3 - 3y \quad (4)$$

$$f_{xy} = -3 \quad f_{yy} = 6y - 6$$

$$f_y = x^2 - 2xy \quad f_{xx} = 2y \quad f_x = 2xy - y^2 \quad (5)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y \quad f_{yy} = -2x$$

$$f_x = 2[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0] \quad (6)$$

$$f_y = 2[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0]$$

$$, f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0] \quad f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$$

$$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$$

$$f_y = e^{xy}(x^2 + xy + 1) \quad f_x = e^{xy}(xy + y^2 + 1) \quad (7)$$

$$f_{xx} = e^{xy} \cdot y(xy + y^2 + 1) + (y + 0 + 0) \cdot e^{xy}$$

$$f_{yy} = e^{xy} \cdot x(x^2 + xy + 1) + (0 + x) \cdot e^{xy}$$

$$f_{xy} = e^{xy} \cdot x(xy + y^2 + 1) + (x + 2y) \cdot e^{xy}$$

$$f_y = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) \quad f_x = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) \quad (8)$$

$$f_{xx} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + (2x + 2)e^{x+y}$$

$$f_{yy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2y) + (2y + 2)e^{x+y}$$

$$f_{xy} = e^{x+y}(x^2 + y^2 + 2x) + 2y \cdot e^{x+y}$$

$$f_y = e^{-x^2-y^2}(4y - 2x^2y - 4y^3) \quad f_x = e^{-x^2-y^2}(2x - 2x^3 - 4xy^2) \quad (9)$$

$$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}(-2x)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(4y - 2x^2y - 4y^3) + (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}(-2y)(2x - 2x^3 - 4xy^2) + (-4x \cdot 2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2} \quad f_x = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad (10)$$

$$f_{yy} = \frac{2 \cdot (1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} \quad f_{xy} = \frac{2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \quad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad (11)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{3} \quad (12)$$

$$f_{xy} = \frac{0(x^2+y^2) - 2y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3} \quad f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$f_y = xz \quad f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (13)$$

$$f_{zx} = y \quad f_z = xy \quad f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x$$

$$-2 \quad (14)$$

$$-1 \quad (15)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (16)$$

$$\frac{4}{e^2} \left( 1 + \frac{1}{e} \right) \quad (17)$$

## שיטות כמותיות

פרק 11 - פונקציות מרובות משתנים - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

1. קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים ..... 100

## קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

### שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות 1-7,

מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$z = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (8)$$

מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(9) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(10) יצרן מוכר מחשבוני, בארץ ובסין.

עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8.

מנהל השיווק אומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ, ואת הביקוש  $Q_2$

למחשבון בסין, על ידי:  $Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$ ,  $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$ .

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוני,  $P_1$  ו-  $P_2$ ,

על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

**(11)** נתונה הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2 + axy$ .

א. הוכיחו שהנקודה  $(0, 0)$  היא נקודה קריטית.

ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של  $a$ , הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכל, או שלא ניתן לדעת.

### תשובות סופיות

- (1)  $(-0.5, 1)$  אוכל;  $(1.5, -3)$  מינימום.
- (2)  $(1, 2)$  מינימום;  $(-1, -2)$  מקסימום;  $(-1, 2)$ ,  $(1, -2)$  אוכל.
- (3)  $(0, 0)$  אוכל;  $(1, 1)$  מינימום.
- (4)  $(-1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  מינימום;  $(1, 0)$  מקסימום;  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 0)$  אוכל.
- (5)  $(0, 2)$  מקסימום.
- (6)  $(4, 4)$  מקסימום.
- (7)  $(-0.5, 4)$  מקסימום.
- (8)  $z = 4$ ,  $z = 3$
- (9) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (10)  $P_1 = 10\$$ ,  $P_2 = 12\$$  רווח מקסימלי 288\$.
- (11) א. שאלת הוכחה. ב. עבור  $a = -2$ ,  $a = 2$ , לא ניתן לדעת;  $a < -2$ ,  $a > 2$  אוכל;  $-2 < a < 2$  מינימום.

## שיטות כמותיות

פרק 12 - פונקציות מרובות משתנים - קיצון של פונקציה של שני משתנים  
תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

1. קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז') ..... 102

## קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

### שאלות

מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות בשאלות 1-4, בכפוף לאילוץ הנתון:

$$(1) \quad f(x, y) = x^2 + y^2; \quad 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$$

$$(2) \quad f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$(3) \quad f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$(4) \quad f(x, y) = x^2 y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$$

$$(5) \quad \max \{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \quad \max \{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9, \quad x, y \geq 0$$

א. פתרו את הבעיה.

ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

$$(7) \quad \text{מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר } x + 3y = 12,$$

מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

$$(8) \quad \text{מבין כל הנקודות שעל העקומה } 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2, \text{ מצאו את הנקודות}$$

שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן

מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \quad \text{מוישליה קונה בשוק } x \text{ ק"ג מלפפונים ו-} y \text{ ק"ג עגבניות.}$$

התועלת מצריכת הסל,  $(x, y)$ , נתונה על ידי  $u(x, y) = \ln x + \ln y$ .

מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישליה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$ ,

והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.

נסחו ופתרו את בעיית מוישליה.

- 10** דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות.  
 התועלת מצריכת הסל  $(x, y)$  נתונה על ידי  $u(x, y) = xy$ .  
 מחיר ק"ג מלפפונים הוא 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.  
 לדני תקציב של 12 ש"ח.  
 נסחו ופתרו את בעיית דני.
- 11** עקומת התמורה בין מנגו,  $(x)$ , ואננס,  $(y)$ , היא  $x^2 + y^2 = 13$ .  
 לדני תועלת  $f(x, y) = 4x + 6y$ .  
 דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$  על עקומת התמורה,  
 המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.  
 נסחו ופתרו את הבעיה.
- 12** ליצרון פונקציית ייצור  $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$ .  
 המחירים ליחידת  $K$  ו- $L$  הם  $P_K = 2$ ,  $P_L = 1$ .  
 היצרון נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף  $(K^*, L^*)$ ,  
 המביא למינימום את העלות.  
 נסחו את בעיית היצרון (אל תפתרו).

## תשובות סופיות

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\max(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0) \quad (2)$$

$$\max(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\max(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, -1) \quad (4)$$

$$\max(6, 2) \quad (5)$$

$$\max(9, 36) \quad (6)$$

$$(6, 2) \quad (7)$$

$$\max(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7}) \quad (8)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (9)$$

$$\max(6, 2) \quad (10)$$

$$\max(2, 3) \quad (11)$$

$$\min\{2K + L\}; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (12)$$

## שיטות כמותיות

פרק 13 - פונקציות מרובות משתנים - קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

תוכן העניינים

1. קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה ..... 105

## קיצון מוחלט של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה

### שאלות

- (1) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה  $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור בצורת משולש שקודקודיו הם  $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$ .
- (2) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה  $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור בצורת ריבוע שקודקודיו הם  $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$ .
- (3) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא העיגול  $x^2 + y^2 \leq 4$ .
- (4) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור  $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$ .
- (5) חשבו את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של הפונקציה  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$  בתחום  $R$ , כאשר  $R$  הוא התחום הסגור  $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$ .

### תשובות סופיות

- |                                      |                                  |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| (1) מקסימום מוחלט 7.                 | מינימום מוחלט -11.               |
| (2) מקסימום מוחלט 3.                 | מינימום מוחלט -1.                |
| (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$ .   | מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$ .   |
| (4) מקסימום מוחלט 6.                 | מינימום מוחלט -1.                |
| (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$ . | מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$ . |